1. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = -2, b = -8$

② $a = 3, b = 4$

③ $a = -1, b = -3$

④ $a = 4, b = -2$

⑤ $a = -3, b = 7$

해설

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 로 놓으면
 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1) = 2 + a + b + 8 = 0,$$

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 8 = 0$$

$$\therefore a + b = -10, 2a + b = -12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -8$

2. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a-m-1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a+1)m + (-2a+b+1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a+1) = 0, -2a+b+1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

3. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $1 + 2i$

⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

$$(x+1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$$

$$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2, 1+2i, 1-2i$$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

4. 다항식 $f(x)$ 를 $2x - 1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x + 2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -14

해설

$$f(x) = (2x - 1)Q(x) - 4 \text{라 하면}$$

$$f(-2) = -5Q(-2) - 4$$

$$\text{그런데 } Q(-2) = 2 \text{ 이므로 } f(-2) = -14$$

5. 다음 중 $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x + y$

② $-x - y$

③ $x + y - 2$

④ $x - y$

⑤ $2x + 2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2 + 2xy + y^2) - 2(x + y) \\ &= (x + y)^2 - 2(x + y) \\ &= (x + y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y - 2) &= -(-x - y)(x + y - 2) \\ &= \frac{1}{2}(2x + 2y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

6. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha + \beta) - \alpha\beta$ 라 하자. $z = \frac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

- ① -1 ② 1 ③ -9 ④ 9 ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned} z &= -2 + i, \bar{z} = -2 - i \\ z * \bar{z} &= (z + \bar{z}) - z\bar{z} \\ &= -4 - 5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

7. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a) = 0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$$(a-2)(x-a) = 0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ 또는 } x=a$$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

8. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이고, 이차방정식 $x^2 - (2a-1)x + 6 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

- ① 4 ② 5 ③ 9 ④ 13 ⑤ 25

해설

$x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$
 $x^2 - (2a-1)x + 6 = 0$ 의 두 근이 a, b 이므로
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} a + b = 2a - 1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ ab = 6 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $b = a - 1$ 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $a(a-1) = 6, a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$ 에서
 $a = -2$ 또는 $a = 3$
 $\therefore (a, b) = (-2, -3), (3, 2)$
어느 경우에도 $a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$ 이다.

9. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $k \leq 2$ ② $k \geq 2$ ③ $-2 \leq k < 2$
④ $4 < k \leq 6$ ⑤ $2 \leq k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.

(i) $D = (k-4)^2 - 4 \geq 0, k^2 - 8k + 12 \geq 0$

$(k-2)(k-6) \geq 0$

$k \leq 2$ 또는 $k \geq 6$

(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0, k < 4$

(i), (ii)의 공통부분을 구하면 $k \leq 2$

11. x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + (3+a)y = 4+a \\ (3-a)x + 4y = 5 \end{cases} \text{의 해가 무수히 많을 때, 상수 } a \text{의 값을}$$

구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

해가 무수히 많으려면 x, y 의 계수의 비가 같아야 하므로

$$\frac{2}{3-a} = \frac{3+a}{4}$$

$$(3-a)(3+a) = 8 \Rightarrow a^2 = 1$$

$$\therefore a = \pm 1$$

$a = 1$ 일 때 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ 로 일치하므로

해가 무수히 많다.

12. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$.

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

13. 1000^{10} 을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R 라 할 때, 다음 중 나머지 R 를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$ 에서 $1000 = x$ 라 하면

$$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 을 대입하면 $R = 1$ 을 구할 수 있다.

14. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \\ 2\alpha &= -1 + \sqrt{3}i \\ 2\alpha + 1 &= \sqrt{3}i \\ \text{양변을 제곱하여 정리하면} \\ \alpha^2 + \alpha + 1 &= 0 \\ \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 \\ &= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4 \\ &= 4\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \text{ 을 얻은 후 } \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 \text{ 를 } \alpha^2 + \alpha + 1 \text{ 로} \\ \text{나누면} \\ \alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5 \\ &= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4 \\ &= 4 (\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)\end{aligned}$$

15. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

16. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 6y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$
이 때, x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = (1-y)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
 $y^2 - 4y + 4 \leq 0, (y-2)^2 \leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2 = 0$
 $\therefore y = 2 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$

해설

주어진 식을 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$
 $x^2 + 2(1-y)x + (1-y)^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $\therefore (x+1-y)^2 + (y-2)^2 = 0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y = 0, y-2 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 2$
 $\therefore \frac{y}{x} = 2$

17. $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

- ① $a+b$ ② $2a-2b$ ③ $2b-2a$
 ④ $2b-2c$ ⑤ 0

해설

a 에 대한 내림차순으로 정리한다.

$$\begin{aligned}
 & -a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b) \\
 &= (c-b)a^2 - (c^2-b^2)a + bc^2 - b^2c \\
 &= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b) \\
 &= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\
 &= (c-b)(a-b)(a-c) \cdots \text{㉠} \\
 &= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots \text{㉡} \\
 &= (b-c)(b-a)(a-c) \cdots \text{㉢} \\
 &= (c-a)(b-c)(b-a) \cdots \text{㉣}
 \end{aligned}$$

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$
 ㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
 ㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$
 ㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

18. $O(0, 0)$, $A(7, 1)$, $B(5, 5)$ 라 할 때, $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (α, β) , 그 때의 최솟값을 r 라 할 때, $\alpha + \beta + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 46

해설

$$\begin{aligned} & \overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \\ &= x^2 + y^2 + (x-7)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ &= 3(x-4)^2 + 3(y-2)^2 + 40 \\ & (x-4)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0 \text{ 이므로} \\ & x=4, y=2 \text{ 에서 최솟값 } r=40 \text{ 을 갖는다.} \\ & \therefore \alpha + \beta + r = 46 \end{aligned}$$

19. 두 포물선 $C_1 : y = x^2 - 10x + 7$, $C_2 : y = -x^2 + 6x + 7$ 이 두 점 A, B에서 만난다. y축에 평행하고 두 점 A, B사이를 지나는 직선을 그어 두 포물선 C_1, C_2 와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은?

- ① 128 ② 130 ③ 132 ④ 134 ⑤ 136

해설

두 점 A, B에서 직선 PQ에 내린 수선의 발까지의 길이를 각각 h_1, h_2 라 하면

$$\square APBQ = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)\overline{PQ} \text{ 이고}$$

$h_1 + h_2$ 의 값은 두 점 A, B의 x좌표의 차와 같다.

두 점 A, B의 x좌표는 두 포물선의 교점의 x좌표이므로

$$x^2 - 10x + 7 = -x^2 + 6x + 7 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ 또는 } x = 8$$

$$\therefore h_1 + h_2 = 8$$

점 P의 좌표를 k 라 하면 선분 PQ의 길이는

$$(-k^2 + 6k + 7) - (k^2 - 10k + 7) = -2k^2 + 16k$$

$$= -2(k - 4)^2 + 32$$

따라서, 사각형 APBQ의 넓이의 최댓값은

$$\overline{PQ} = 32 \text{ 일 때이므로}$$

$$\square APBQ = \frac{1}{2} \times 8 \times 32 = 128$$