

1. $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $ab + bc + ca = 9$, $a + b + c$ 의 값은?

① $-3\sqrt{2}$

② $-2\sqrt{3}$

③ $\pm 3\sqrt{3}$

④ $\pm 3\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= 9 + 18 = 27\end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c = \pm 3\sqrt{3}$$

2. $(x+y)a - (x-y)b - (y-z)c - 4z = 0$ 이 x, y, z 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc 를 구하면?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

x, y, z 에 대해 정리하면

$$(a-b)x + (a+b-c)y + (c-4)z = 0$$

x, y, z 에 대한 항등식이므로

$$a = b, a + b - c = 0, c = 4$$

$$\therefore a = b = 2, c = 4$$

$$\therefore abc = 16$$

3. 다항식 $f(x)$ 를 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$

② $-x+3$

③ $x-3$

④ $-x-3$

⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$ 를 $x-1$, $x-2$ 로 나눈 나머지는 각각 2, 1이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x) + ax + b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$ 를 대입하면

$$f(1) = a + b = 2, \quad f(2) = 2a + b = 1$$

두 식을 연립하여 구하면 $a = -1, b = 3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

4. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

$$\textcircled{5} \quad x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$$

5. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$
따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

6. x 에 대한 이차방정식 $2mx^2 + (5m+2)x + 4m+1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 실수 m 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}, -2$ ② $-\frac{7}{12}, -\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}, 2$
④ $-\frac{2}{7}, 2$ ⑤ $\frac{2}{7}, \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면 중근을 가질 조건은 $D = 0$ 이므로

$$D = (5m+2)^2 - 4 \cdot 2m \cdot (4m+1) = 0$$

$$25m^2 + 20m + 4 - 32m^2 - 8m = 0$$

$$7m^2 - 12m - 4 = 0$$

$$(7m+2)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = -\frac{2}{7} \text{ 또는 } 2$$

7. 이차방정식 $x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8

② -4

③ -2

④ 5

⑤ 2

해설

$$x^2 - x(kx - 7) + 3 = 0$$

$$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$$

$$(1 - k)x^2 + 7x + 3 = 0$$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 7^2 - 4 \cdot (1 - k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$$

$$37 + 12k < 0$$

$$\therefore k < -\frac{37}{12}$$

따라서 최대정수는 -4이다.

8. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수)의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켈레근 $1 - i$ 도 식의 근.
 $(1 + i) + (1 - i) = -a$
 $\therefore a = -2$

9. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나고, $x = -1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y = a(x+1)^2 - 3$ 에 $(1, 5)$ 를 대입하면 $a = 2$

따라서 $y = 2(x+1)^2 - 3$ 을 전개하면

$y = 2x^2 + 4x - 1$ 이므로 $a = 2, b = 4, c = -1$

$\therefore abc = -8$

10. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

11. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z) 가 바르게 짝지어진 것은?

$3x - y = y + z = 3x - z = 1$

- ① $(1, 1, 1)$

② $(-1, 1, 2)$

③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- ④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$

⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x - y = 1, y + z = 1, 3x - z = 1$
변변끼리 모두 더하면, $6x = 3, x = \frac{1}{2}$
각각 대입하면, $y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$
 $\therefore (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

12. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

13. $\frac{1999^3 + 1}{1999 \cdot 1998 + 1}$ 의 값은?

- ① 1997 ② 1998 ③ 1999 ④ 2000 ⑤ 2001

해설

1999 = x 라 놓으면

$$\begin{aligned} \text{(준 식)} &= \frac{x^3 + 1}{x(x-1) + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= x + 1 = 1999 + 1 = 2000 \end{aligned}$$

14. $A = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ $-i$

해설

$$A = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i$$

$$A^2 = i^2 = -1, A^3 = i^3 = -i, A^4 = i^4 = 1$$

$$\therefore 1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$$

$$= 1+(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$$

$$+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})$$

$$= 1+(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$$

$$= 1$$

15. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$$(a-2)(x-a)=0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ 또는 } x=a$$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

16. 이차방정식 $x^2 + 6x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 실수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b - \sqrt{3}i$ 이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
 $a = (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = b^2 + 3$
 $-6 = (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = 2b,$
 $b = -3, a = 12$
따라서 $a + b = 9$

17. 이차방정식 $x^2 + (k-4)x + 1 = 0$ 의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k \leq 2$

② $k \geq 2$

③ $-2 \leq k < 2$

④ $4 < k \leq 6$

⑤ $2 \leq k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.

(i) $D = (k-4)^2 - 4 \geq 0, k^2 - 8k + 12 \geq 0$

$(k-2)(k-6) \geq 0$

$k \leq 2$ 또는 $k \geq 6$

(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0, k < 4$

(i), (ii)의 공통부분을 구하면 $k \leq 2$

18. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 $y = -2x$ 에 모두 접할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= -2x \text{에서} \\x^2 + (a+2)x + b &= 0 \\ \therefore D &= (a+2)^2 - 4b = 0 \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= \frac{1}{2}x \text{에서} \\x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + b &= 0 \\D &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4b = 0 \cdots \text{②}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{①, ②에서 } (a+2)^2 &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \therefore a &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

19. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6

20. x, y 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} &2x - x^2 + 4y - y^2 + 3 \\ &= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3 \\ &= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8 \end{aligned}$$

x, y 는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0, (y - 2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$ 은
 $x - 1 = 0, y - 2 = 0$ 일 때 최댓값 8을 갖는다.

21. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$ 을 만족시킬 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$ 에서 x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$$

$$(y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 2$$

따라서 y 의 최댓값은 2, 최솟값은 -3 이다.

22. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 α, β 라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$

④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$$\begin{aligned} x^3 = 1 \text{에서 } x^3 - 1 &= 0 \\ \rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ \therefore x-1 = 0, \text{ 또는 } x^2 + x + 1 &= 0 \\ \therefore x = 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \\ \therefore \alpha\beta &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
 $\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$ 의 값을 구해도 된다.

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x+y=k & \cdots \textcircled{1} \\ x^2+2y^2=4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = -x + k$ 를 ②에 대입하면

$$x^2 + 2(-x + k)^2 = 4$$

$$3x^2 - 4kx + 2k^2 - 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

이차방정식 ③이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(2k^2 - 4) = 0$$

$$4k^2 - 6k^2 + 12 = 0, \quad k^2 = 6$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{6}$$

$$\therefore k_1k_2 = \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = -6$$

24. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
 $(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$
이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.
 $\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{A}},$
 $2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{\text{B}}$
 $\textcircled{\text{B}}$ 에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 $\textcircled{\text{A}}$ 에 대입하면 $x^2 = 1$
따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2, x = -1$ 일 때 $y = -2$
그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)
따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

25. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이
단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인
상수)

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로
 $3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$
 $3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$
 $k = 0$ 또는 $\alpha = 1$
 $k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
 $\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면
 $3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$
 $\therefore 3k + \alpha = -1$