1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$ 의 값은?

① $-3\sqrt{2}$　　② $-2\sqrt{3}$　　③ $\pm3\sqrt{3}$

④ $\pm3\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ &= 9+18=27\end{aligned}$$

$$\therefore\ a+b+c=\pm3\sqrt{3}$$

2. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4　② 8　③ 16　④ 32　⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면

$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$

$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로

$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$

$\therefore\ a=b=2,\ c=4$

$\therefore\ abc=16$

3. 다항식 $f(x)$를 두 일차식 $x-1$, $x-2$로 나눌 때의 나머지는 각각 2, 1이다. 이때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 나머지는?

① $x+3$ ② $-x+3$ ③ $x-3$

④ $-x-3$ ⑤ $-x+1$

해설

$f(x)$를 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지는 각각 $2, 1$이므로

$f(1)=2, f(2)=1$, 구하는 나머지를 $ax+b$라 하자.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

양변에 각각 $x=1$, $x=2$를 대입하면

$f(1)=a+b=2$, $f(2)=2a+b=1$

두 식을 연립하여 구하면 $a=-1, b=3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-x+3$

4. 다음 중 다항식 $x^4 - 8x^2 - 9$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x - 3$

② $x + 3$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 9$

⑤ $x^3 + 3x^2 + x + 3$

해설

준 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 + 1)(x^2 - 9)$$
$$= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3)$$

⑤ $x^2(x + 3) + x + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$

5. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉡}}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉢}}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\text{㉣}}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\,\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\,\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

6. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$ ② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2},\ 2$
④ $-\frac{2}{7},\ 2$ ⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

7. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8 ② -4 ③ -2 ④ 5 ⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\dfrac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

8. $x^2+ax+b=0$ (a,b 는 실수) 의 한 근이 $1+i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1+i$ 이므로,
켤레근 $1-i$ 도 식의 근.
$(1+i)+(1-i)=-a$
$\therefore\ a=-2$

9. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(1,5)$ 를 지나고, $x=-1$ 일 때 최솟값 -3 을 가진다. 이 때, abc 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$y=a(x+1)^2-3$ 에 $(1,\ 5)$ 를 대입하면 $a=2$
따라서 $y=2(x+1)^2-3$ 을 전개하면
$y=2x^2+4x-1$ 이므로 $a=2,\ b=4,\ c=-1$
$\therefore\quad abc=-8$

10. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2 ② $-1 + \sqrt{2}$, -3 ③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3 ⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

11. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z)가 바르게 짝지어진 것은?

$3x - y = y + z = 3x - z = 1$

① $(1, 1, 1)$ ② $(-1, 1, 2)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ ⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x - y = 1,\ \ y + z = 1,\ \ 3x - z = 1$

변변끼리 모두 더하면, $6x = 3,\ \ x = \frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y = \frac{1}{2},\ \ z = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \ (x,\ y,\ z) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

12. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1)$ $\therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore$ $a = -2, b = 3$

$\therefore ab = -6$

13. $\dfrac{1999^3+1}{1999\cdot 1998+1}$ 의 값은?

① 1997 ② 1998 ③ 1999 ④ 2000 ⑤ 2001

해설

$1999=x$라 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1}{x(x-1)+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$

$$=x+1=1999+1=2000$$

14. $A=\dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1　② i　③ 0　④ -1　⑤ $-i$

해설

$$A=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$$

$A^2=i^2=-1,\ A^3=i^3=-i,\ A^4=i^4=1$

$\therefore\ 1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$

$=1+(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})$

$=1+(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=1$

15. x 에 대한 방정식 $(a-2)(x-a)=0$ 의 풀이 과정에서 다음 중 옳은 것은?

① $a=0$ 일 때, $x=2$

② $a \neq 2$ 일 때, $x=a$

③ $a=2$ 일 때, 불능

④ $a=0$ 일 때, 부정

⑤ 해는 없다.

해설

$(a-2)(x-a)=0$

$\Rightarrow \quad a=2$ 또는 $x=a$

i) $a=2$ 일 때 : 부정

ii) $a \neq 2$ 일 때 : $x=a$

16. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

17. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k \ge 2$　③ $-2 \le k < 2$

④ $4 < k \le 6$　⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.

(i) $D=(k-4)^2-4 \ge 0$, $k^2-8k+12 \ge 0$

$(k-2)(k-6) \ge 0$

$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$

(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$, $k < 4$

(i), (ii)의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

18. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$의 그래프가 두 직선 $y = \frac{1}{2}x$와 $y = -2x$에 모두 접할 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

해설

$x^2 + ax + b = -2x$에서

$x^2 + (a+2)x + b = 0$

$\therefore\ D = (a+2)^2 - 4b = 0 \cdots$ ①

$x^2 + ax + b = \frac{1}{2}x$에서

$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + b = 0$

$D = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4b = 0 \ \cdots$ ②

①,②에서 $(a+2)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore\ a = -\frac{3}{4}$

19. x에 관한 이차방정식 $x^2+2ax+9-2a^2=0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\frac{D}{4}=a^2-(9-2a^2)\geq 0$에서 $a^2\geq 3$

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-2a)^2-2(9-2a^2)\\&=4a^2-18+4a^2=8a^2-18\end{aligned}$$

$\therefore a^2+\beta^2\geq 8\times 3-18=6$

따라서 $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 6

20. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$

$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$

$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$

$x,\ y$는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0$

따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은

$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

21. 두 실수 x, y가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 x가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$$

$$(y+3)(y-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 2$$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

22. 방정식 $x^3=1$의 두 허근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2+\alpha+1=0$　　② $\alpha=\beta^2$

③ $\alpha^2+\beta^2=-1$　　④ $\alpha\beta=-1$

⑤ $\beta^2+\beta+1=0$

해설

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x-1=0,$ 또는 $x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=1,\quad \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ \alpha\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\frac{(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$$

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근이 α,β이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
$\alpha^2+\beta^2, \alpha\beta$의 값을 구해도 된다.

23. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=k \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, k_1k_2 의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$\begin{cases} x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+k$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+2(-x+k)^2=4$

$3x^2-4kx+2k^2-4=0 \quad \cdots ㉢$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=(2k)^2-3(2k^2-4)=0$

$4k^2-6k^2+12=0,\ k^2=6$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

$\therefore\ k_1k_2=\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=-6$

24. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

25. 두 이차방정식 $3x^2-(k+1)x+4k=0$, $3x^2+(2k-1)x+k=0$이 단 하나의 공통인 근 α를 가질 때, $3k+\alpha$의 값은? (단, k는 실수인 상수)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α이므로

$3\alpha^2-(k+1)\alpha+4k=0$

$3\alpha^2+(2k-1)\alpha+k=0$

두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha-1)=0$

$k=0$ 또는 $\alpha=1$

$k=0$이면 두 식이 같아지므로

조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ \alpha=1$을 대입하면

$3-(k+1)+4k=0,\quad k=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 3k+\alpha=-1$