1. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　　② $2x$　　③ $3x+2$

④ $4x$　　⑤ $4x+1$

해설

x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면

$Q(x)=x-1,\ \ R(x)=3x+1$

$\therefore\ \ Q(x)+R(x)=4x$

2. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 14　　⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

3. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

4. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

5. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$ ㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$ ㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=7,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

6. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 를$x-1, x-2, x-3$ 으로 나눈 나머지가 각각 $2, 4, 6$ 일 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① 2　　② 5　　③ 7　　④ 11　　⑤ 14

해설

$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$

$a+b+c=2,\ 4a+2b+c=4,\ 9a+3b+c=6$

$a=0,\ b=2,\ c=0$

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

$f(4)=3\times2\times1+8=14$

7. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

8. 복소수 $(1-xi)(1-i)$가 순허수가 되도록 실수 x의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

$(1-xi)(1-i)=(1-x)+(-1-x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1-x=0$,
$x=1$

9. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1)$, $(4,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$ 3개

10. $4-3i+\dfrac{3-5i}{1+i}+4i+\dfrac{-3+5i}{1+i}-\dfrac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$　　② 3　　③ $4i$

④ 5　　⑤ $1+3i$

해설

$$4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$
$$=4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$
$$=4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3$$

11. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4$

$=\frac{1}{i}^5+\frac{1}{i}^6+\frac{1}{i}^7+\frac{1}{i}^8\cdots$

$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2+\frac{1}{i}^3+\frac{1}{i}^4$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^2$

$=1-i-1=-i$

12. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$
그러므로 $x = 3$또는 $x = 4$
$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

13. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$를 두 근으로 하는 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x+4=0$　　② $x^2+6x-4=0$

③ $x^2+4=0$　　④ $x^2-6x+4=0$

⑤ $x^2-6x-4=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해서

두 근 α, β에 대해 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

두 근을 $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$로 하는

방정식에서

두 근의 합 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=(-3)+\frac{-3}{1}=-6$$

두 근의 곱 $\Rightarrow \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$$=\alpha\beta+2+\frac{1}{\alpha\beta}=4$$

$\therefore\ x^2-(-6)x+4=x^2+6x+4=0$

14. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

15. 0이 아닌 실수 x, y가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서
$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$
$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$
$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$
$xy-2a$, $y-2ax$는 실수이므로
$xy-2a=0$, $y-2ax=0$
$\therefore\ xy=2a$, $y=2ax$
두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$
$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1$, $x=\pm 1$

16. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times7)$

$=84$

17. 모든 실수 x에 대하여 등식 $x^{100}-1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{100}(x-1)^{100}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{100}=2^m+k$이다. $m+k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98

해설

$x=0$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{100}=-1\cdots$㉠

$x=2$를 대입하면

$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}=2^{100}-1\cdots$㉡

㉠ + ㉡: $2(a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100})=2^{100}-2$

$\therefore\ a_0+a_2+a_6+\cdots+a_{100}=2^{99}-1$

$\therefore\ m=99,\ k=-1$이므로 $m+k=98$

18. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $xf(x)+3$을 $x-1$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x),\ R$
② $Q(x),\ R+3$
③ $xQ(x), R$
④ $xQ(x),\ R+3$
⑤ $xQ(x)+R,\ R+3$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

$$\begin{aligned} xf(x)+3 &= (x-1)xQ(x)+Rx+3 \\ &= (x-1)xQ(x)+R(x-1)+R+3 \\ &= (x-1)\left\{xQ(x)+R\right\}+R+3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫 : $xQ(x)+R$, 나머지 : $3+R$

19. 이차식 $f(x)$를 각각 $x-3, x+1$로 나눈 나머지는 같고, $f(1)=0$일 때, $\dfrac{f(4)}{f(-4)}=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소)이다. 이 때, $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

$f(1)=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ f(x)=(x-1)(ax+b)$

$f(3)=f(-1)$ 이므로 $2(3a+b)=-2(-a+b)$

$\therefore\ a=-b$

$$\frac{f(4)}{f(-4)}=\frac{3(4a+b)}{-5(-4a+b)}=\frac{-9b}{-25b}=\frac{9}{25}$$

$\therefore\ m=25,\ n=9$

20. 1999 개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수) 라 하면 ($1 \le n \le 1999$ 인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$ 의 43 개

21. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$를 인수분해 하였을 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $ab+bc+ca$

해설

문자가 여러 개일 경우 동차식이면 어느 한 문자에 대하여 정리하고
차수가 다르면 차수가 낮은 문자에 대해 정리한다.

$\therefore$ (준식) $= a^3b^2-a^2b^3+b^3c^2-b^2c^3+c^3a^2-c^2a^3$

$=(b^2-c^2)a^3-(b^3-c^3)a^2+b^2c^2(b-c)$

$=(b-c)\{(b+c)a^3-(b^2+bc+c^2)a^2+b^2c^2\}$

$=(b-c)\{(c^2-a^2)b^2-a^2(c-a)b-a^2c(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)\{(c+a)b^2-a^2b-a^2c\}$

$=(b-c)(c-a)\{(b^2-a^2)c+ab(b-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)\{(b+a)c+ab\}$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

22. 삼각형의 세변의 길이를 $x,\ y,\ z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y,\ z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\}z$
$= (x+y)(x^2+z^2-y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$
$x^2+z^2-y^2 = 0$ ($\because\ x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x^2+z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

23. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는
실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$
$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$
㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

24. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.
$z = a + bi$ 라면
$1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$
이것이 순허수이므로 $1 + a = 0$, $a = -1$
$\therefore\ z = -1 + bi$
또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$
$1 - 2bi - b^2 = c + 4i$
$\therefore\ -2b = 4$, $1 - b^2 = c$
$\therefore\ b = -2,\ c = -3$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = 14$

25. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　② $2b$　③ $-2c$　④ $-2a$　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0$, $b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0$, $c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

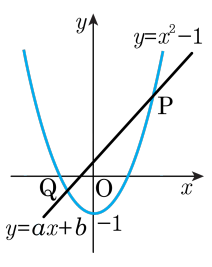
$\therefore\ a+b+c < 0$

$\therefore$(주어진 식) $= |a+b+c| - |a+b| - |c|$

$= -(a+b+c) + (a+b) - c$

$= -2c$

26. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) + b$

$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b$, $2 = a$

$\therefore a = 2$, $b = 0$

27. 이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. $\overline{PQ}=10$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① 16　② 20　③ 22　④ 26　⑤ 30

해설

이차함수 $y=(x-5)^2+1$ 의 그래프는
직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이고
$\overline{PQ}=10$ 이므로 두 점 P, Q 의 x 좌표는
각각 0, 10 이다.
따라서 점 P (또는 Q) 의 y 좌표를 구하면
$(0-5)^2+1=26$ 이므로
$\therefore\ a=26$

28. $x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 이므로
$y=-x+3\geq 0 \ \rightarrow\ -x\geq -3 \ \rightarrow\ x\leq 3 \therefore\ 0\leq x\leq 3\ (\because\ x\geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

29. x 가 실수일 때, 함수 $f(x) = \dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3} = k$ 라 하면

$x^2+4x-1 = k(x^2-2x+3)$

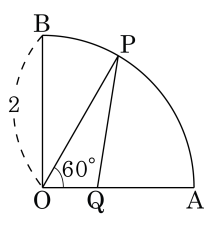
$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4 = (k+2)^2-(k-1)(3k+1) \geq 0$

$-2k^2+6k+5 \geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은 3 이다.

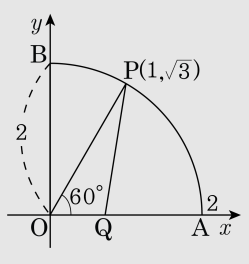
30. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60°$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?



① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{15}{4}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.
이 때, $Q(x, 0)$ 로 놓으면 $(0 < x < 2)$

$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$

따라서, $x = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 갖는다.

31. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 + t = 0,\ t(t+1) = 0$

$\therefore\ t = 0$ 또는 $t = -1$

(i) $x + \frac{1}{x} = 0$일 때, $x^2 + 1 = 0$

$\therefore x = \pm i$

(ii) $x + \frac{1}{x} = -1$일 때,

$x^2 + 1 = -x,\ x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x = \pm i$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$

32. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ $-\frac{8}{9}$　⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

ⅰ) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ⅱ) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0$, $a(9a+8)=0$,

$\therefore a=0,\ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$

33. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \dfrac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$

㉤ $\omega\overline{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}} = -1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots$ ㉠(○)

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ㉡(○)

∴근과 계수와의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega\overline{\omega} = 1 \cdots$ ㉣(×), ㉤(○)

$\omega + \overline{\omega} = -1$이므로

$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots$ ㉢(○)

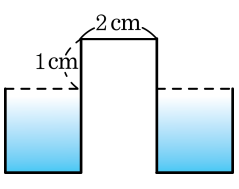
$\omega^{2005} + \dfrac{1}{\omega^{2005}}$

$= (\omega^3)^{668}\omega + \dfrac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$

$= \omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots$ ㉥(○)

34. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,cm^2$　② $288\,cm^2$　③ $350\,cm^2$
④ $420\,cm^2$　⑤ $120\,cm^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면
총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서
$4a+2b=96$
$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$
한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,cm^2$

35. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

36. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0\ \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

37. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$　　② $3x^2+2x-5$　　③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ x^2+2x-5　　⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$

$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.

$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$

$f(-3)=(-3-3)^2a=4$

$\therefore\ a=\frac{1}{9}$

$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

38. $-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의 합이 될 수 없는 것은?

① $a+b$　　② $2a-2b$　　③ $2b-2a$

④ $2b-2c$　　⑤ 0

해설

a에 대한 내림차순으로 정리한다.

$-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-b^2c$

$=(c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)\cdots$ ㉠

$=(a-b)(b-c)(c-a)\cdots$ ㉡

$=(b-c)(b-a)(a-c)\cdots$ ㉢

$=(c-a)(b-c)(b-a)\cdots$ ㉣

㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a-2b$

㉡식 : 세항을 모두 더하면 0

㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2c$

㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b-2a$

39. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$　② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$　③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$
④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$　⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{100}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

임을 이용하면

$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3$ 의 값은

$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1)$ 와 같으므로

구하는 값은

$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

40. $\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $x = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ 이라 할 때, $3x^3+4x^2+3x+3$ 의 값을 구하면?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$$x = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{\frac{3-\sqrt{5}i}{2}}{\frac{-1-\sqrt{5}i}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}i}{-1-\sqrt{5}i}$$

$\therefore x = \dfrac{1+2\sqrt{5}i}{3}$ $3x-1 = (3x-1 = 2\sqrt{5}i)$, 양변을 제곱해서 정리하면

$3x^2-2x+7=0$

$3x^3+4x^2+3x+3$ 를 $3x^2-2x+7$ 로 나누면 몫이 $x+2$, 나머지가 -11 이다.

즉, $3x^3+4x^2+3x+3 = (3x^2-2x+7)(x+2)-11$

$3x^2-2x+7=0$ 이므로

$\therefore\ 3x^3+4x^2+3x+3 = -11$