

1. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
 $\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는 x 값을 대입한다.
 $x^2 + x + 1 = 0$ 에서 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$
 $\therefore x^3 = 1$
준 식의 좌변에 $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면
 $2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$
 $\therefore a = 3$

2. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식 : } 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

3. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

- ① 0 ② 2 ③ -2 ④ 4 ⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항) \times (상수항), (2차항) \times (1차항)
2쌍씩이다.
 $4 \times 1 \times 2 + (-3) \times 2 \times 2 = 8 + (-12) = -4$

4. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y 를 구할 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

$$(1 - 2xi)(2 - yi) = 6 - 2i \quad (\text{단, } x > 0)$$

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$$(2 - 2xy) - (4x + y)i = 6 - 2i$$

$$2 - 2xy = 6, \quad 4x + y = 2$$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1(x > 0), \quad y = -2$$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1+i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

▷ 정답: $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1+i$ 를 대입하여 정리하면
 $1 + 2i - 1 + a(1+i) + b = 0$ 과
 $a + b + (a+2)i = 0$ 이다.
위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서
 $a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켈레복소수 근을 갖는다.

따라서 두 근은 $1+i, 1-i$

근과 계수의 관계에서

$$-a = (1+i) + (1-i) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = (1+i)(1-i) = 2 \quad \therefore b = 2$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

7. $x^2 - 9x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, 상수 $a + b$ 의 값은?

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 9, \quad \alpha\beta = 3$$

9, 3을 근으로 하는 x^2 의 계수가 1 이차방정식은

$$(x - 9)(x - 3) = 0$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0 \quad \therefore a = -12, b = 27$$

8. $a^2 + b^2 = 5$ 인 관계에 있는 두 실수 a, b 에 대하여 $f(x) = x^2 - 4ax + b^2$ 의 최솟값을 상수 k 라 할 때, k 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4ax + b^2 \\ &= (x - 2a)^2 + b^2 - 4a^2 \text{에서} \end{aligned}$$

$$k = b^2 - 4a^2 = (5 - a^2) - 4a^2 = -5a^2 + 5$$

∴ 따라서 k 의 최댓값은 5

9. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} &x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0 \text{ 의 근 } 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, \alpha \\ &\text{세 근의 곱 : } \alpha(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = -4 \\ &\alpha(1 + 3) = -4, \alpha = -1 \\ &\text{세 근 : } 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, -1 \\ &\text{세 근의 합 : } 1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i - 1 = -a \\ &a = -1 \\ &b = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (-1)(1 - \sqrt{3}i) \\ &\quad + (-1)(1 + \sqrt{3}i) \\ &= 1 + 3 - 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i = 2 \\ &\therefore a + b = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

10. 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근을 $\omega, \bar{\omega}$ 라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \bar{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\bar{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \bar{\omega}, (\bar{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$$x^3 = 1, (x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

$$x^2+x+1=0 \quad \omega^3 = 1,$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$$

① $x^2+x+1=0$ 두근은

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega + \bar{\omega} = -1(\text{○})$$

② $x^2+x+1=0$ 두근은

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$$\omega \cdot \bar{\omega} = 1(\text{○})$$

$$\text{③ } \omega^2 + \bar{\omega}^2 = (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega \cdot \bar{\omega}$$

$$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\text{×})$$

④ $\omega + \bar{\omega} = -1,$

$$\bar{\omega} = -1 - \omega$$

$$= -(1 + \omega) = \omega^2$$

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega = -1 - \bar{\omega} = -(1 + \bar{\omega})$$

$$= \bar{\omega}^2(\text{○})$$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

11. 연립방정식 $\begin{cases} xy + 2yz = 8 \\ yz + 2zx = 15 \\ zx + 2xy = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 +$

z^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\begin{aligned} xy + 2yz &= 8 \quad \cdots \textcircled{1} \\ yz + 2zx &= 15 \quad \cdots \textcircled{2} \\ zx + 2xy &= 10 \quad \cdots \textcircled{3} \\ \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ 하면 } 3(xy + yz + zx) &= 33 \\ xy + yz + zx &= 11 \quad \cdots \textcircled{4} \\ \textcircled{1} - \textcircled{4} \text{ 하면 } yz - zx &= -3 \quad \cdots \textcircled{5} \\ \textcircled{2} - \textcircled{5} \text{ 하면 } 3zx &= 18 \\ zx &= 6 \quad \cdots \textcircled{6} \\ xy &= 2 \quad \cdots \textcircled{7} \\ yz &= 3 \quad \cdots \textcircled{8} \\ \textcircled{6} \times \textcircled{7} \times \textcircled{8} \text{ 하면 } (xyz)^2 &= 36 \\ xyz &= \pm 6 \\ \therefore x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3 & \text{ (복호동순이 아님)} \\ \therefore x^2 + y^2 + z^2 &= 4 + 1 + 9 = 14 \end{aligned}$$

12. x, y 의 연립방정식 $ax + y = 1, x + ay = 1$ 의 근이 존재하기 위한 a 의 조건은?

① $a \neq 2$

② $a = \pm 1$

③ $a \neq \pm 2$

④ $a \neq -1$

⑤ $a \neq -2$

해설

$ax + y - 1 = 0, x + ay - 1 = 0$ 으로 변형하면,

i) $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$ 일 때, 오직 한 근을 가진다.

$a^2 \neq 1, \therefore a \neq \pm 1$

ii) $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$ 일 때, 해가 무수히 많다.

$\therefore a = 1$

i), ii)에 의해서, $a \neq -1$ 일 때 해가 존재한다.

13. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$ 를 모두 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

순서쌍 (x, y) 는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \dots \textcircled{1} \\ 2xy = y^2 - y & \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{의 해이다.}$$

①에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

②에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore y = 0$ 또는 1

(ii) $x = 2y$ 일 때 :

②에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore y = 0$ 또는 $-\frac{1}{3}$

$\therefore (x, y) = (0, 0), (0, 1), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 & \cdots\cdots\cdots\text{㉠} \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 & \cdots\cdots\cdots\text{㉡} \end{cases}$ 을 풀면 $x = \alpha, y = \beta$

또는 $x = \gamma, y = \delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ - ㉡에서 $x - y = -2$, 즉 $y = x + 2$

㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1, -2$$

$$\therefore x = -1, y = 1 \text{ 또는 } x = -2, y = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 6$$

15. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 0 \text{ 에서} \\(x+1)^2 + (y-2)^2 &= 0 \\x, y \text{ 는 실수이므로 } x &= -1, y = 2 \\ \therefore x+y &= -1+2 = 1\end{aligned}$$

16. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

17. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,

$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0
- ② a_0
- ③ a_1
- ④ a_5
- ⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
 $\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
 $f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

18. 정식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때 3이 남고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때 $3x$ 가 남는다. $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

- ① $6x - 1$ ② $6x - 2$ ③ $6x - 3$
 ④ $6x - 5$ ⑤ $6x - 9$

해설

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q_1(x) + 3 \\
 &= (x - 1)(x - 2)Q_1(x) + 3 \cdots \cdots \text{㉠} \\
 f(x) &= (x^2 - 4x + 3)Q_2(x) + 3x \\
 &= (x - 1)(x - 3)Q_2(x) + 3x \cdots \cdots \text{㉡} \\
 f(x) &= (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b \\
 &= (x - 2)(x - 3)Q(x) + ax + b \cdots \cdots \text{㉢}
 \end{aligned}$$

㉠, ㉢에서 $f(2) = 3 = 2a + b \cdots \cdots \text{㉣}$
 ㉡, ㉢에서 $f(3) = 9 = 3a + b \cdots \cdots \text{㉤}$
 \therefore ㉣, ㉤에서 $a = 6, b = -9$
 \therefore 나머지는 $6x - 9$

19. 함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 와 $g(x)$ 는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1) = 0$, $g(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지는?

- ① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$
④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$ 라 하면
 $g(x) = f(x)Q(x) + ax + b$
 $g(\sqrt{2}+1) = f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1) + a(\sqrt{2}+1) + b$
 $\qquad\qquad\qquad = a(\sqrt{2}+1) + b \quad (\because f(\sqrt{2}+1) = 0)$
 $\therefore a + b + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$
 $\therefore a = 1, b = 1$
따라서 구하는 나머지는 $x+1$

20. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\ &= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2 \\ &= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2 \\ &= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2 \\ &= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pq = (-18) \times (-4) = 72$$

21. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 을 이용하여 $\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

9999 = a 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} &= \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1} \\ &= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1} \\ &= a + 1 = 10000 \end{aligned}$$

22. 두 다항식 A, B 에 대하여 $(A, B) = A^2 + B^2 - AB$ 라 할 때, $(x^2 + 1, 2x^2 - 3) - 7$ 을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

- ① $x - \sqrt{2}$ ② $x - 1$ ③ x
④ $x + 1$ ⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 + 1, 2x^2 - 3) - 7 \\ &= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\ &= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\ &= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\ &= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\ &= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

23. $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② -1

③ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2z + 1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$$z^2 + z + 1 = 0, (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z^3 = 1, \bar{z}^3 = 1$$

$$z^{2005} + \bar{z}^{2005} = (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z}$$

$$= z + \bar{z}$$

$$= -1$$

24. a_1, a_2, \dots, a_{10} 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 일 때, $\sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기>에서 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1 ㉡ -1 ㉢ i ㉣ $-i$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉣
 ④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣, ㉤

해설

$a_1 a_2 \dots a_{10} = 1$ 이면 a_1, a_2, \dots, a_{10} 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k + 2$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k+2} = \sqrt{1} \cdot i^2 = -1 \end{aligned}$$

ii) -1 이 $4k$ ($k = 0, 1, 2$) 개 있을 때

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_1} \sqrt{a_2} \dots \sqrt{a_{10}} \\ &= \sqrt{a_1 a_2 \dots a_{10}} i^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

25. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여
 $x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$
 $= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4}$ ㉠
 한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면
 $x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
 준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로
 x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
 따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.
 $\therefore D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$
 $2+k = 0$
 $\therefore k = -2$

26. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

27. 이차방정식 $x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

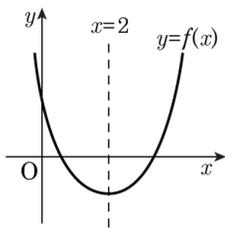
해설

$x^2 + kx + 3k - 11 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면
 $\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 3k - 11$
 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
 $= k^2 - 12k + 44 = (k - 6)^2 + 8$
따라서 $k = 6$ 일 때 $(\alpha - \beta)^2$ 는 최소

해설

$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$ 이므로
 $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{k^2 - 12k + 44}}{1}$
 $\therefore k^2 - 12k + 44$ 가 최소이려면 $k = 6$

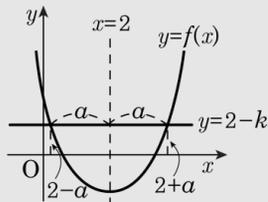
28. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x 에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$ 의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓으면
 $f(t) = 0$ 을 만족시키는 두 실근은
 $t = 2 - k$ 또는 $t = 2 + k$
 $(0 < k < 2)$ 로 놓을 수 있다.
 $\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$ 를 만족시키는 x 의 값은
 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$ 의 교점의 x 좌표이므로
 $x = 2 - a$ 또는 $x = 2 + a$
(ii) $f(x) = 2 + k$ 를 만족시키는 x 의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$ 을 만족시키는 모든 실근의 합은
 $(2 - a) + (2 + a) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

29. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$ 이 직선 $y = kx - 6$ 보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1+k)x + 9$ 에서 $D < 0$ 을 이용하여 $\alpha + \beta$ 를 구하면,
 $(1+k)^2 - 36 < 0$
 $k^2 + 2k - 35 < 0, (k+7)(k-5) < 0 \therefore -7 < k < 5$
 $\therefore \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

30. 두 함수 $f(x) = |x-2| - 5$, $g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2| - 5 = t$ 로 놓으면
 $y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t+3)^2 - 1$
그런데 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $-5 \leq t \leq -2$ 이므로
 y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
 $t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
 $\therefore M = 3, m = -1$
 $\therefore M + m = 2$

31. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

32. 사차방정식 $x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 해는?

- ① $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
 ② $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
 ③ $x = \frac{-15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 ④ $x = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 ⑤ $x = 15 \pm \sqrt{221}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 8x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 8x + 17 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0$$

$\therefore x + \frac{1}{x} = A$ 라 하자.

$$A^2 + 8A + 15 = (A + 3)(A + 5)$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 3\right)\left(x + \frac{1}{x} + 5\right) = 0$$

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

33. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

- ① $-i$ ② i ③ $-2i$
 ④ $3i$ ⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
 따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
 한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
 우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
 따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 \therefore 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
 네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
 즉 $i \times (\text{나머지 세 근의 곱}) = 1$
 \therefore 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$

34. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2 \text{의 계수}}{x^3 \text{의 계수}}\right)$ 이므로
 x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
 최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
 $f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$
 $f(2x+3)$
 $= (2x+3)^3 - 3 \cdot (2x+3)^2 + b \cdot (2x+3) + d$
 3차항과 2차항의 계수를 중심으로
 식을 정리하면
 $8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$
 \therefore 세 근의 합 = -3

해설

$f(2x+3) = 0$ 의 세 근을
 각각 p, q, r 이라 하면,
 $2p+3 = \alpha \dots \textcircled{1}$
 $2q+3 = \beta \dots \textcircled{2}$
 $2r+3 = \gamma \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 에서
 $2(p+q+r) + 9 = 3$
 $\therefore p+q+r = -3$

35. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근 α 를 가질 때, $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} - \textcircled{B} \text{에서 } (k-1)\alpha - 3(k-1) = 0,$$

$$(k-1)(\alpha-3) = 0$$

(i) $k=1$ 인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$ 으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

$$\text{(ii) } \alpha=3 \text{인 경우 } 9+3k+3=0 \therefore k=-4$$

$$\therefore \alpha - k = 7$$

36. 0이 아닌 세수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 중 적어도 하나는 6이고, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 일 때, $2(x+y+z)$ 의 값을 구하면?

- ① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z 중 적어도 하나가 6이므로,

$$(x-6)(y-6)(z-6) = 0$$

$$\therefore xyz - 6(xy + yz + zx) + 36(x + y + z) - 216 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

또, x, y, z 의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \quad \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 6(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$36(x + y + z) = 216$$

$$\therefore 2(x + y + z) = 12$$

37. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라고 할 때, $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 와의 차는?

- ① $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$ ② $\frac{1}{2} \cdot 2^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$
 ④ $2(3^{30} + 1)$ ⑤ $2(3^{30} - 1)$

해설

문제의 조건으로부터

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R \cdots \text{㉠}$$

이므로 몫 $Q(x)$ 는 29차의 다항식이다.

㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $R=3^{30}$

여기에서 몫은 29차의 다항식이므로

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{29}x^{29}$$

으로 놓으면 $Q(x)$ 의 계수의 총합은

$x=1$ 을 대입한

$$Q(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{29} \text{과 같다.}$$

따라서 구하는 차는 $|Q(1) - R| \cdots \text{㉡}$

한편 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 = -2Q(1) + R \therefore Q(1) = \frac{1}{2}(R-1)$$

이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}
 |Q(1) - R| &= \left| \frac{1}{2}(R-1) - R \right| = \frac{|R+1|}{2} \\
 &= \frac{|3^{30} + 1|}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)
 \end{aligned}$$

38. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)g(x) + ax^2 + bx + c$ 로 두면 $x^2 + 1$ 로 나누었을 때의 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + bx + c - a \text{에서}$$

$$bx + c - a = x + 1$$

$$\therefore b = 1, c - a = 1$$

또, $f(1) = a + b + c = 4$ 이므로

$$c - 1 + 1 + c = 4 \text{에서 } c = 2$$

39. 세 변의 길이가 x, y, z 인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 = 0$ 이 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

- ① $z = x$ 인 이등변삼각형, 또는 y 가 빗변인 직각삼각형
- ② $y = z$ 인 이등변삼각형, 또는 x 가 빗변인 직각삼각형
- ③ x 가 빗변인 직각삼각형
- ④ y 가 빗변인 직각삼각형
- ⑤ $x = y$ 인 이등변 삼각형, 또는 z 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned}
 & (x^4 - y^4)(x + y) - 2(x^3 - y^3)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)(x + y)^2(x^2 + y^2) - 2(x - y)(x^2 + xy + y^2)z^2 + (x - y)z^4 \\
 &= (x - y)\{(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - 2(x^2 + xy + y^2)z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 - 2xy^2z^2 - 2y^2z^2 + z^4\} \\
 &= (x - y)\{x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)\{(x^2 + y^2 - z^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2 - z^2)\} \\
 &= (x - y)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy) = 0 \\
 &\therefore x = y \text{인 이등변 삼각형 또는 } z \text{가 빗변인 직각 삼각형} \\
 &(\because x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 \text{에서 삼각형의 변인 } x, y, z \text{는 } x + y \neq z)
 \end{aligned}$$

40. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값을 계산하면?

- ① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha + \beta = -3 < 0$, $\alpha\beta = 1 > 0$, $D = 9 - 4 > 0$ 이므로 두 근은 모두 음수이다.

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha < 0, \beta < 0 \text{이므로})$$

$$= -3 - 2 = -5$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \pm\sqrt{5}i$$

$$\text{한편, } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(-\alpha) \cdot (-1)} + \sqrt{(-\beta) \cdot (-1)}$$

$$= \sqrt{-\alpha} \cdot i + \sqrt{-\beta} \cdot i$$

$$= (\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}) \cdot i$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \text{ 는 (양수)} \times i \text{ 꼴이다.}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}i$$