1. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3 ② 3 ③ -6 ④ 6 ⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,\ x^3 - 1 = 0$

$\therefore x^3 = 1$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1,\ x^2 = -x - 1$을 대입하면

$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0,\ a - 3 = 0$

$\therefore\ a = 3$

2. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$

④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

3. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0 ② 2 ③ -2 ④ 4 ⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 \ =8+(-12)=-4$

4. 다음 등식을 만족시키는 실수 x, y를 구할 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

$$(1-2xi)(2-yi)=6-2i \ (\text{단, } x>0\ )$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(2-2xy)-(4x+y)i=6-2i$

$2-2xy=6,\ 4x+y=2$

연립하여 x 에 대해 정리하면

$2x^2-x-1=0$

$(x-1)(2x+1)=0$

$\therefore\ x=1(x>0),\ y=-2$

5. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

7. $x^2-9x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 이 때, 상수 $a+b$의 값은?

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9, \quad \alpha\beta=3$

9, 3을 근으로 하는 x^2의 계수가 1 이차방정식은

$(x-9)(x-3)=0$

$x^2-12x+27=0 \quad \therefore a=-12, \ b=27$

8. $a^2+b^2=5$ 인 관계에 있는 두 실수 a, b 에 대하여 $f(x)=x^2-4ax+b^2$ 의 최솟값을 상수 k 라 할 때, k 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x)=x^2-4ax+b^2$$
$$=(x-2a)^2+b^2-4a^2 \text{에서}$$

$k=b^2-4a^2=(5-a^2)-4a^2=-5a^2+5$

∴ 따라서 k 의 최댓값은 5

9. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 일 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3+ax^2+bx+4=0$ 의 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, \alpha$

세 근의 곱 : $\alpha(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=-4$

$\alpha(1+3)=-4$, $\alpha=-1$

세 근 : $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -1$

세 근의 합 : $1+\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i-1=-a$

$a=-1$

$b=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(-1)(1-\sqrt{3}i)$

$+(-1)(1+\sqrt{3}i)$

$=1+3-1+\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i=2$

$\therefore\ a+b=-1+2=1$

10. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 ω, ϖ라고 할 때, 다음 관계식이 성립하지 않는 것은?

① $\omega + \overline{\omega} = -1$

② $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$

③ $\omega^2 + (\overline{\omega})^2 = 1$

④ $\omega^2 = \overline{\omega}$, $(\overline{\omega})^2 = \omega$

⑤ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$, $(x-1)(x^2+x+1) = 0$,

$x^2 + x + 1 = 0$ $\omega^3 = 1$,

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$,

$\overline{\omega}^2 + \overline{\omega} + 1 = 0$

① $x^2 + x + 1 = 0$두근은

$\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega + \overline{\omega} = -1(\bigcirc)$

② $x^2 + x + 1 = 0$두근은

$\omega, \overline{\omega}$이므로

$\omega \cdot \overline{\omega} = 1(\bigcirc)$

③ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega \cdot \overline{\omega}$

$= (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1(\times)$

④ $\omega + \overline{\omega} = -1,$

$\overline{\omega} = -1 - \omega$

$= -(1 + \omega) = \omega^2$

$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega = -1 - \overline{\omega} = -(1 + \overline{\omega})$

$= \overline{\omega}^2(\bigcirc)$

⑤$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ $(\bigcirc)$

11. 연립방정식 $\begin{cases} xy+2yz=8 \\ yz+2zx=15 \\ zx+2xy=10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$xy+2yz=8 \quad \cdots$ ㉠

$yz+2zx=15 \cdots$ ㉡

$zx+2xy=10 \cdots$ ㉢

㉠ + ㉡ + ㉢하면 $3(xy+yz+zx)=33$

$xy+yz+zx=11 \quad \cdots$ ㉣

㉠ − ㉣하면 $yz-zx=-3 \quad \cdots$ ㉤

㉢ − ㉤하면 $3zx=18$

$zx=6 \cdots$ ㉥

$xy=2 \cdots$ ㉦

$yz=3 \cdots$ ㉧

㉥ × ㉦ × ㉧하면 $(xyz)^2=36$

$xyz=\pm 6$

$\therefore \ x=\pm 2, y=\pm 1, z=\pm 3$ (복호동순이 아님)

$\therefore \ x^2+y^2+z^2=4+1+9=14$

12. x, y의 연립방정식 $ax+y=1, x+ay=1$의 근이 존재하기 위한 a의 조건은?

① $a \neq 2$　② $a = \pm 1$　③ $a \neq \pm 2$
④ $a \neq -1$　⑤ $a \neq -2$

해설

$ax+y-1=0,\ \ x+ay-1=0$으로 변형하면,

ⅰ) $\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a}$일 때, 오직 한 근을 가진다.

$a^2 \neq 1, \quad \therefore\ a \neq \pm 1$

ⅱ) $\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$일 때, 해가 무수히 많다.

$\therefore\ a = 1$

ⅰ), ⅱ)에 의해서, $a \neq -1$일 때 해가 존재한다.

13. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(ⅰ) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

(ⅱ) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\dfrac{1}{3}$

$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

15. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

16. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

17. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

18. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$ ② $6x-2$ ③ $6x-3$

④ $6x-5$ ⑤ $6x-9$

해설

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-3x+2)Q_1(x)+3 \\
&= (x-1)(x-2)Q_1(x)+3 \cdots\cdots ㉠ \\
f(x) &= (x^2-4x+3)Q_2(x)+3x \\
&= (x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots\cdots ㉡ \\
f(x) &= (x^2-5x+6)Q(x)+ax+b \\
&= (x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots\cdots ㉢
\end{aligned}
$$

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉣에서 $f(3)=9=3a+b$ $\cdots\cdots$ ㉤

$\therefore$ ㉣, ㉤에서 $a=6,\ b=-9$

$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

19. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$

④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$라 하면

$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$

$$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$$
$$=a(\sqrt{2}+1)+b\ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$$

$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$

20. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$이다. pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\
&= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18)+21x^2 \\
&= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\}+21x^2 \\
&= (x^2-18)^2-4x(x^2-18)-21x^2+21x^2 \\
&= (x^2-18)(x^2-4x-18)
\end{aligned}
$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore pg=(-18)\times(-4)=72$

21. 인수분해 공식 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1}$을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999 = a$라 하면

$$\frac{9999^3 + 1}{9998 \times 9999 + 1} = \frac{a^3 + 1}{(a - 1)a + 1}$$
$$= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)}{a^2 - a + 1}$$
$$= a + 1 = 10000$$

22. 두 다항식 A, B에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　　② $x - 1$　　③ x

④ $x + 1$　　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$$
$$= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7$$
$$= 3x^4 - 9x^2 + 6$$
$$= 3(x^4 - 3x^2 + 2)$$
$$= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2)$$
$$= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

23. $z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3 = 1,\ \ \bar{z}^3 = 1$

$$\begin{aligned} z^{2005} + \bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z} \\ &= z + \bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$

24. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1	㉡ -1	㉢ i	㉣ $-i$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$$
$$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$$
$$=1$$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

25. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여

$$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$$
$$= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면
$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

26. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면

$x^2+5yx+ay^2+y-2$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$D=(25-4a)y^2-4y+8$

$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$

$4-200+32a=0$

$\therefore \ a=\frac{49}{8}$

27. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 α, β라고 하면

$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$

따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

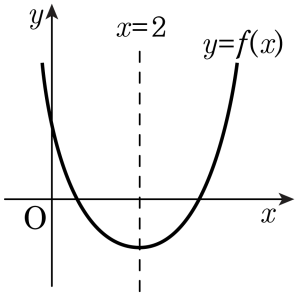
해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$

$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

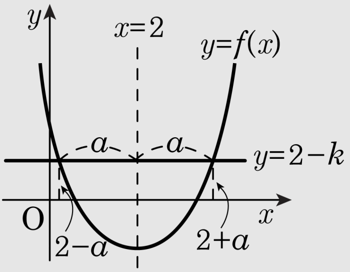
28. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$



(i) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 x의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 x좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
(ii) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

29. 이차함수 $y = x^2 - x + 3$이 직선 $y = kx - 6$보다 항상 위쪽에 있도록 상수 k의 값의 범위를 정하면 $\alpha < k < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = x^2 - x + 3 - (kx - 6) = x^2 - (1 + k)x + 9$ 에서 $D < 0$을 이용하여 $\alpha + \beta$를 구하면,

$(1 + k)^2 - 36 < 0$

$k^2 + 2k - 35 < 0$, $(k + 7)(k - 5) < 0 \therefore\ -7 < k < 5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -7 + 5 = -2$

30. 두 함수 $f(x) = |x-2|-5$, $g(x) = x^2+6x+8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2|-5 = t$ 로 놓으면

$y = g(f(x)) = g(t) = t^2+6t+8 = (t+3)^2-1$

그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로

y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M=3,\ m=-1$

$\therefore M+m=2$

31. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(2y^2 + y - 6\right) \geq 0$$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

32. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

33. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$　　② i　　③ $-2i$

④ $3i$　　⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$

$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$

따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$

한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$

우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$

따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고

$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.

$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$,

네 근의 곱은 $\dfrac{e}{a}$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1

즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$

$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\dfrac{1}{i}=-i$

34. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$ 이므로
x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1 인 삼차방정식을
$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3 이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3 차항과 2 차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$ 세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$ ㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$ ㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$ ㉢
㉠ + ㉡ + ㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$

35. 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + x + 3k = 0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha - k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha - 3(k-1) = 0$,

$(k-1)(\alpha-3) = 0$

(i) $k = 1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha = 3$인 경우 $9 + 3k + 3 = 0 \quad \therefore \ k = -4$

$\therefore \ \alpha - k = 7$

36. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0\ \cdots$①

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz\ \cdots$②

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

37. x^{30}을 $x-3$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $Q(x)$의 계수의 총합(상수항 포함)과 R와의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{30}+1)$ ② $\frac{1}{2}\cdot 2^{30}$ ③ $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$
④ $2(3^{30}+1)$ ⑤ $2(3^{30}-1)$

해설

문제의 조건으로부터
$x^{30}=(x-3)Q(x)+R\cdots$㉠
이므로 몫 $Q(x)$는 29차의 다항식이다.
㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $R=3^{30}$
여기에서 몫은 29차의 다항식이므로
$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{29}x^{29}$
으로 놓으면 $Q(x)$의 계수의 총합은
$x=1$을 대입한
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{29}$과 같다.
따라서 구하는 차는 $|Q(1)-R|\cdots$㉡
한편 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1=-2Q(1)+R \therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}(R-1)$
이 값을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}|Q(1)-R|&=\left|\frac{1}{2}(R-1)-R\right|=\frac{|R+1|}{2}\\&=\frac{|3^{30}+1|}{2}=\frac{1}{2}(3^{30}+1)\end{aligned}$$

38. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때, 나머지의 상수항은?

① 4　② 3　③ 2　④ 1　⑤ 0

해설

$f(x) = (x^2+1)(x-1)g(x) + ax^2 + bx + c$로 두면 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$ax^2+bx+c = a(x^2+1)+bx+c-a$에서

$bx+c-a = x+1$

$\therefore\ b=1,\ c-a=1$

또, $f(1) = a+b+c = 4$이므로

$c-1+1+c=4$에서 $c=2$

39. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

40. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 계산하면?

① $\sqrt{5}i$ ② $-\sqrt{5}i$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $-\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}i$

해설

$\alpha+\beta=-3<0$, $\alpha\beta=1>0$, $D=9-4>0$이므로 두 근은 모두 음수이다.

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+(\sqrt{\beta})^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ $\alpha<0$, $\beta<0$이므로)

$=-3-2=-5$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\pm\sqrt{5}i$

한편, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(-\alpha)\cdot(-1)}+\sqrt{(-\beta)\cdot(-1)}$

$=\sqrt{-\alpha}\cdot i+\sqrt{-\beta}\cdot i$

$=(\sqrt{-\alpha}+\sqrt{-\beta})\cdot i$

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$는 (양수)$\times i$ 꼴이다.

$\therefore$ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}i$