

1. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $xf(x)-3$ 을 $x+1$ 로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$$\therefore xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$$

$$\therefore xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)+R\} - R - 3$$

2. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$ 일 때, abc 의 값은?

- ① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 \\ &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{ 이므로} \\ & 5 = 1 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = -2 \\ & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ 이므로} \\ & 2 - 3abc = 1 \cdot (5+2) \\ & \therefore abc = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

3. 복소수 $(1+i)x^2 - (2+i)x - 3 - 2i$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다고 할 때, 실수 x 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(\text{준식}) = x^2 - 2x - 3 + (x^2 - x - 2)i$$

이것을 제곱해서 음의 실수가 되려면 순허수이어야 하므로

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \cdots \text{㉠}, \quad x^2 - x - 2 \neq 0 \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠에서 } x = 3, \quad x = -1$$

이 중에서 ㉡를 만족하는 것은 $\therefore x = 3$

4. $f(x) = \frac{x}{1-i}$, $g(x) = \frac{x}{1+i}$ 인 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $\{f(1+i)\}^{2006} + \{g(1-i)\}^{2007}$ 의 값은?

① -2

② $-1+i$

③ -1

④ $-1-i$

⑤ 2

해설

$$f(1+i) = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$g(1-i) = \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= (i)^{2006} + (-i)^{2007} \\ &= i^2 + (-i)^3 (\because i^{2004} = (-i)^{2004} = 1) \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

5. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$

② $-2\sqrt{2}i$

③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$

⑤ $2i$

해설

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$x - y = 2\sqrt{2}i, xy = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

6. 임의의 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 의 곱 $z\bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ 을 간단히 하면?

- ① $-y$ ② $-x$ ③ x ④ y ⑤ 0

해설

$$z\bar{z} = 1 \text{ 에서 } \frac{1}{z} = \bar{z} = x - yi$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}\{(x + yi) + (x - yi)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2x \\ &= x\end{aligned}$$

7. 실수 a, b 에 대하여 연산*를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3, 2$
 $\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$
 $\therefore \alpha + 2\beta = 1$

8. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$ 일 때, 실수 a, b 에 대하여 ab 의 값은?

① -36 ② -18 ③ 18 ④ 24 ⑤ 36

해설

a, b 가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{5}i$ 이다.
근과 계수의 관계의 의하여
 $-a = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 4$
 $\therefore a = -4$
 $b = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 9$
 $\therefore ab = -36$

9. x 의 이차방정식 $x^2 - (2a + 2 + m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수 m, n 을 정할 때, $m + n$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 4

해설

$$D = (2a + 2 + m)^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

이 등식을 a 에 관하여 정리하면

$$4a(m - 2) + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 관계없이 항상 성립하려면

$$4(m - 2) = 0, m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m = 2, n = -4 \quad \therefore m + n = -2$$

10. 이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 의 한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은?
(단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b + \sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b - \sqrt{2}i$ 이다.

근과 계수와의 관계를 이용하면

$$2b = -4, \quad b^2 + 2 = a$$

$$\therefore a = 6, \quad b = -2, \quad ab = -12$$

11. x 의 이차방정식 $x^2 + (a^2 - a - 12)x - a + 3 = 0$ (a 는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha + \beta = -(a^2 - a - 12) = 0, \alpha\beta = -a + 3 < 0$$

$$\therefore a = 4$$

12. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$ 의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 11x + 3 &= 0 \\(x + 3)(x^2 - 4x + 1) &= 0 \\\therefore x &= -3, 2 \pm \sqrt{3} \\\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} \\&= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} \\&= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}} \\&= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

13. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 1개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } x^2 - (y - 3)^2 = 0$$

$$(x + y - 3)(x - y + 3) = 0$$

$$y = x + 3 \text{ 또는 } y = -x + 3$$

i) $y = -x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 이 때, } y = 1$$

ii) $y = x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{이 때, } y = 2 \pm \sqrt{3}i$$

i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 (2, 1)이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

15. 다음 두 방정식이 공통근 α 를 갖는다. 이 때, $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α 이므로
 $\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 $\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $-2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$
 $\alpha = 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $1 + m + 2 - 4 = 0$
 $\therefore m = 1$
 $\therefore m + \alpha = 2$

16. $x + \frac{1}{x} = 3$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면?
(단, $x > 0$)

① 5, 6

② 7, 18

③ 8, 16

④ 9, 18

⑤ 10, 27

해설

$$x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 9 = 18$$

17. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

- ① $(x-a)(x-b)(x-c)$
 $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
- ② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$
 $= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
- ③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
 $= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- ⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
 $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 28$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 28^2 \cdots \textcircled{1}$
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176 이므로 $4(a+b+c) = 176$
 $\therefore a+b+c = 44 \cdots \textcircled{2}$
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이므로 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \cdots \textcircled{3}$
따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152 이다.

18. 두 실수 x, y 에 대하여 $x^2 + y^2 = 7$, $x + y = 3$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \text{에서 } 3^2 = 7 + 2xy, xy = 1$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) \text{에서 } x^3 + y^3 = 18$$

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \\ &= 7 \times 18 - 1^2 \times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면
 $P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$
 $P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로
 $a(x^2 + 1)^2 + b(x^2 + 1) = (ax^2 + bx)^2 + 1$
 $ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
 $a = a^2, 2ab = 0, 2a + b = b^2, a + b = 1$
 $a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서
 $(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데
이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$
즉, $P(x) = x$ 뿐이다.
 $\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면
 $P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.
 $P(1) = 1 (\because \text{모든 계수의 합은 } x = 1 \text{ 대입})$

20. $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 을 동시에 만족시키는 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 이 성립할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 11

② 8

③ 7

④ 6

⑤ 4

해설

(i) $x + y + z = 0$, $2x - y - 7z = 3$ 에서

x, y 를 z 에 대하여 나타내면

$$x = 2z + 1, y = -3z - 1$$

(ii) $x = 2z + 1$, $y = -3z - 1$ 을 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$(4a + 9b + c)z^2 + 2(2a + 3b)z + (a + b - 1) = 0$$

$$\therefore 4a + 9b + c = 0, 2a + 3b = 0, a + b - 1 = 0$$

$$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

21. 다항식 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a$ 가 이차다항식의 완전제곱꼴이 되도록 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+a \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+a \\ &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+a \\ & x^2+8x=A \text{로 놓으면} \\ & (\text{준식}) = (A+7)(A+15)+a \\ & \quad = A^2+22A+105+a \\ & \quad = (A+11)^2-16+a \end{aligned}$$

따라서, $a=16$ 일 때 이차식 $x^2+8x+11$ 의 완전제곱식이 된다.

22. 세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에 대하여 $(a^2 + b^2)c + (a + b)c^2 = (a + b)(a^2 + b^2) + c^3$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?
- ① $b = c$ 인 이등변 삼각형 ② a 가 빗변인 직각삼각형
③ $a = c$ 인 이등변 삼각형 ④ c 가 빗변인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

준식을 c 에 관한 내림차순으로 정리하면
 $c^3 - (a + b)c^2 - (a^2 + b^2)c + (a + b)(a^2 + b^2)$ 에서
 $c^2\{c - (a + b)\} - (a^2 + b^2)\{c - (a + b)\}$
 $= \{c - (a + b)\}[c^2 - (a^2 + b^2)]$
 $= (c - a - b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$
 a, b, c 는 삼각형의 세변이므로
 $c - a - b \neq 0$ 이고 $c^2 - a^2 - b^2 = 0$
즉 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로 c 가 빗변인 직각 삼각형이다.

23. $\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$ 라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40} - 2^{35} - 2^5 + 1}{2^{35} - 1} &= \frac{x^8 - x^7 - x + 1}{x^7 - 1} \\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1} \\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

24. 유리수 a, b, c, d 에 대하여 $(\sqrt{2} + i)^4 + a(\sqrt{2} + i)^3 + b(\sqrt{2} + i)^2 + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$ 을 만족한다. 이 때, $a - b - c - d$ 의 값은? (단, $i^2 = -1$)

① -7

② 3

③ 1

④ -1

해설

$$(\sqrt{2} + i)^4 = -7 + 4\sqrt{2}i, (\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i,$$

$$(\sqrt{2} + i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$(-7 + 4\sqrt{2}i) + a(-\sqrt{2} + 5i)$$

$$+ b(1 + 2\sqrt{2}i) + c(\sqrt{2} + i) + d = 0$$

$$(-7 - \sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)$$

$$+ (4\sqrt{2} + 5a + 2\sqrt{2}b + c)i = 0$$

$$\therefore (-7 + b + d) + (c - a)\sqrt{2} = 0,$$

$$(5a + c) + (4 + 2b)\sqrt{2} = 0$$

$$a, b, c, d \text{ 는 유리수이므로 } -7 + b + d = 0 :$$

$$c - a = 0, 5a + c = 0, 4 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 0, b = -2, c = 0, d = 9$$

$$\therefore a - b - c - d = -7$$

25. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

- ㉠ $f(z) \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡

⑤ ㉠, ㉢

해설

- ㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $f(z) = z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
 $= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
 $\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z} \bar{w}$
 $= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

26. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

- ① $a = 3, b = -2$
- ② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$
- ③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$
- ④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$
- ⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = -a \cdots \cdots$ ①
 $\alpha\beta = b \cdots \cdots$ ②
 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이므로
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots$ ③
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots$ ④
③에서 $\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$
 $\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$
④에서 $\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$
 $\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$
 $\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$

27. 이차방정식 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근을 $\frac{1}{(1+i)^2}$ 이라 할 때,
 $f(2x+3) = 0$ 의 두 근의 합은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① -5 ② -3 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$\frac{1}{(1+i)^2} = \frac{1}{1+2i-1} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$$

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 의 한 근이 $-\frac{1}{2}i$ 이면

a, b, c 가 실수이므로 다른 한 근은 $\frac{1}{2}i$

$\therefore f(x) = 0$ 의 두 근의 합은 0

$f(2x+3) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자.

$$(2\alpha+3) + (2\beta+3) = 0$$

$$2(\alpha+\beta) = -6$$

$$\therefore \alpha+\beta = -3$$

28. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

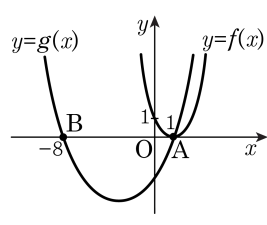
▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

29. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 점 $A(1, 0)$ 에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점 $A(1, 0)$, $B(-8, 0)$ 에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2 의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$ 의 근은?



- ① $x = 1$
 ② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$
 ③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$
 ④ $x = -\frac{5}{1}$ 또는 $x = 1$
 ⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$$f(x) = (x-1)^2, g(x) = (x+8)(x-1) \text{ 이므로}$$

$$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

$$\approx 3x^2 + 12x - 15 = 0 \text{ 의 근은 } 3(x+5)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ or } x = 1$$

30. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
 $\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0을 가진다.

31. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$

이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면

$3x^2 - 2(x^2 - 2x) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

32. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$$y^2 - 2y + (x^2 + 2x - 2) = 0$$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 \leq 0, (x + 3)(x - 1) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq x \leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

33. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 허근을 α, β 라 할 때,

$\alpha + \beta$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$$

$\therefore x+1=0$ 또는

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$$

(i) $x+1=0$ 에서 $x=-1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 - 4t + 3 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$\therefore t=1$ 또는 $t=3$

$$\textcircled{1} x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 일 때, } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\textcircled{2} x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 일 때, } x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 이므로

두 허근 α, β 의 합은

$\alpha + \beta = 1$ 이다.

34. 사차방정식 $x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = 0$ 이 $x = -1 + \sqrt{2}$ 를 한 근으로 가질 때, $2a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x = -1 + \sqrt{2}$ 에서 $x + 1 = \sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$
 $\therefore x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx - 5 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 + cx + 5)$
 $= x^4 + (2 + c)x^3 + (4 + 2c)x^2 + (10 - c)x - 5$
 $\therefore 2 + c = 5, 4 + 2c = a, 10 - c = b$
 $\therefore a = 10, b = 7, c = 3$

35. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

36. $\frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} = k \times 10^n$ (단, $0 < k < 10$, n 은 자연수)로 나타낼 때, n 의 값을 구하면?

- ① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$$\begin{aligned} \frac{10^{85}}{10^{15} + 10^5} &= N \text{이라고 하면} \\ \frac{10^{85}}{10^{15} + 10^{15}} &< N < \frac{10^{85}}{10^{15}} \\ \frac{10 \times 10^{84}}{2 \times 10^{15}} &< N < \frac{10 \times 10^{84}}{10^{15}} \\ 5 \times 10^{69} &< N < 10 \times 10^{69} \\ \text{따라서 } N &= k \times 10^{69} (5 < k < 10) \\ \therefore n &= 69 \end{aligned}$$

37. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 있다.

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999, Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$$

두 삼차다항식을 $x^2 - 1$ 로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$ 의 값은?

① -3998

② -1999

③ 0

④ 1999

⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$ 로 놓으면

$H(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$H(x) = 2x^3 + (a - c)x^2 + (b - d)x + 3998$$

$= (x^2 - 1)(2x - 3998)$ 으로 놓을 수 있다.

($\because x^3$ 의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫은 $2x - 3998$ 이다.)

$$\therefore P(1999) - Q(1999)$$

$$= H(1999)$$

$$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$$

$$= 0$$

38. 다항식 $f(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_1(x), R_1$ 이라 하고 $Q_1(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_2(x), R_2, \dots, Q_n(x)$ 를 $x-k$ 로 나눈 몫과 나머지를 $Q_{n+1}(x), R_{n+1}$ 이라 할 때, $f(x)$ 를 $(x-k)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 하면, $R(k)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0

② kR_1

③ R_1

④ $R_1 + R_2 + \cdots + R_n$

⑤ $R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n$

해설

$$f(x) = (x-k)Q_1(x) + R_1$$

$$Q_1(x) = (x-k)Q_2(x) + R_2$$

$$\vdots$$

$$Q_n(x) = (x-k)Q_{n+1}(x) + R_{n+1}$$

$$\therefore f(x) = (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + R_2\} + R_1$$

$$= (x-k)^2Q_2(x) + (x-k)R_2 + R_1$$

$$= (x-k)^nQ_n(x) + (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1$$

$$\therefore R(x) = (x-k)^{n-1}R_n + \cdots + (x-k)R_2 + R_1$$

$$\therefore R(k) = R_1$$

39. $f(x)$ 는 다항식으로 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나누면 나머지는 $x+1$ 이라고 한다. $f(x)$ 를 x^2 으로 나눌 때, 나머지는?

- ① $x + \frac{1}{3}$ ② $x + \frac{1}{2}$ ③ $\frac{x}{3} + 1$ ④ $\frac{x}{2} + 1$ ⑤ $\frac{x}{5} + 1$

해설

$f(x)$ 를 x^2 으로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$ 라 하면
 $f(x) = x^2Q(x) + ax + b$
 $\{f(x)\}^3 = \{x^2Q(x) + ax + b\}^3$
이것을 $x^2P(x) + (ax+b)^3$ 이라 하면
 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지는
 $(ax+b)^3$ 을 x^2 으로 나눈 나머지와 같으므로
 $(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ 에서
 $3ab^2x + b^3 = x + 1$
 $\therefore 3ab^2 = 1, b^3 = 1$
 $\therefore a = \frac{1}{3}, b = 1$
 $\therefore ax + b = \frac{x}{3} + 1$

40. 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-a)(x-b)$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(a+b)$ 는? (단, a, b 는 서로 다른 실수)

- ① $af(a) + bf(b)$ ② $-af(a) + bf(b)$
 ③ $\frac{af(a) - bf(b)}{a - b}$ ④ $\frac{bf(a) - af(b)}{a - b}$
 ⑤ $bf(a) - af(b)$

해설

$$\begin{aligned}
 R(x) &= cx + d \text{라 하면} \\
 f(a) &= ac + d, f(b) = bc + d \\
 \therefore f(a) - f(b) &= (a - b)c \\
 \therefore c &= \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \\
 \text{또 } f(a) + f(b) &= (a + b)c + 2d \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + 2d \\
 \therefore 2d &= f(a) + f(b) - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{(a - b) \{f(a) + f(b)\}}{a - b} - \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} \\
 &= \frac{1}{a - b} [af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - \{af(a) - af(b) + \\
 &\quad bf(a) - bf(b)\}] \\
 &= \frac{1}{a - b} \{af(a) + af(b) - bf(a) - bf(b) - af(a) + af(b) - \\
 &\quad bf(a) + bf(b)\} = \frac{2af(b) - 2bf(a)}{a - b} \\
 \therefore d &= \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 \text{따라서 } R(a + b) &= (a + b)c + d \\
 &= (a + b) \times \frac{f(a) - f(b)}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{(a + b) \{f(a) - f(b)\}}{a - b} + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - af(b) + bf(a) - bf(b) + af(b) - bf(a)}{a - b} \\
 &= \frac{af(a) - bf(b)}{a - b}
 \end{aligned}$$