

1. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (y^2 - y - 2) \geq 0$$

$$y^2 - y - 6 \leq 0, (y + 2)(y - 3) \leq 0$$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

2. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

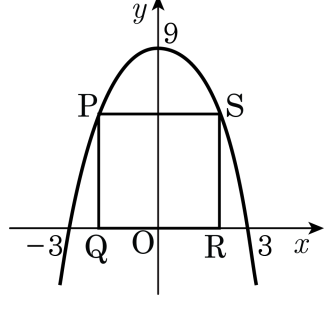
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$$

$$y^2 + y - 6 \leq 0, \quad (y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

3. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



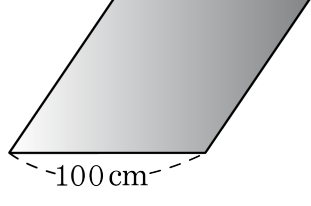
▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

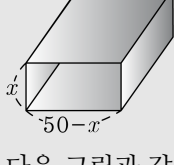
먼저 이차함수의 식을 구하면
(0, 9) 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
(3, 0) 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
 $R(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $S(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2(2a + (-a^2 + 9)) = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

4. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S 를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



- ① 695 cm^2 ② 710 cm^2 ③ 625 cm^2
④ 525 cm^2 ⑤ 410 cm^2

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록
철판으로 구부리면 단면적 S 는
$$S = x(50 - x) = -x^2 + 50x$$
$$= -(x - 25)^2 + 625$$
$$\therefore x = 25\text{ 일 때, } S\text{의 최댓값은 } 625\text{ cm}^2$$

5. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 하고
 $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때, $z\bar{z}$ 의 값을 구하면?
 (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{에서} \\ w, \bar{w} &\text{는 } x^2 + x + 1 = 0 \text{의} \\ &\text{두 근이므로 근과 계수의 관계에서} \\ w + \bar{w} &= -1, \quad w\bar{w} = 1 \\ \text{또한, } z &= \frac{\omega + 1}{2\omega + 1} \text{에서 } \bar{z} = \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1} \text{이므로} \\ z\bar{z} &= \frac{w + 1}{2w + 1} \times \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1} \\ &= \frac{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}{4w\bar{w} + 2(w + \bar{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0, \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \therefore w^2 + w + 1 &= 0, \quad w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{라 하자} \\ z &= \frac{w + 1}{2w + 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}i}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \\ z\bar{z} &= \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

6. $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $(\omega^2 + 1)^5 + (\omega - 1)^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$ ④ 2ω ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}x^3 + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \\ \omega^3 + 1 &= 0, \omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0 \\ \omega^2 + 1 &= \omega, \omega^6 = 1, \omega - 1 = \omega^2 \\ (\text{준식}) &= \omega^5 + (\omega^2)^{100} = \omega^5 + \omega^{200} \\ &= \omega^3 \cdot \omega^2 + (\omega^6)^{33} \cdot \omega^2 \\ &= -\omega^2 + \omega^2 = 0\end{aligned}$$