1. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + y^2 - 4x - y - 2 = 0$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2 - 4x + y^2 - y - 2 = 0$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - \left(y^2 - y - 2\right) \geq 0$$

$y^2 - y - 6 \leq 0$, $\left(y + 2\right)\left(y - 3\right) \leq 0$

$\therefore -2 \leq y \leq 3$ 따라서, y 의 최댓값은 3 이다.

2. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

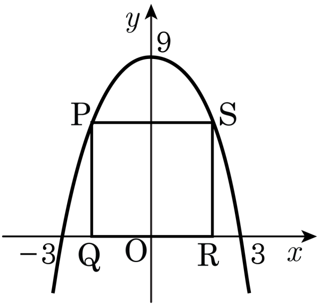
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = y^2 - \left(2y^2 + y - 6\right) \geq 0$$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

3. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



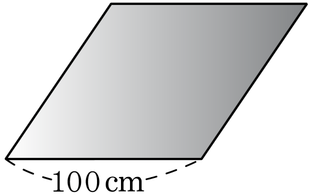
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

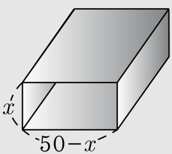
4. 다음 그림과 같은 철판을 구부려서 직사각형의 철판 S를 만들고자 한다. S 의 단면적의 최댓값은?



① $695\,\mathrm{cm}^2$　② $710\,\mathrm{cm}^2$　③ $625\,\mathrm{cm}^2$

④ $525\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $410\,\mathrm{cm}^2$

해설



다음 그림과 같이 단면적이 직사각형이 되도록 철판으르 구부리면 단면적 S 는

$$S = x(50-x) = -x^2+50x$$
$$= -(x-25)^2+625$$

$\therefore$ $x=25$ 일 때, S 의 최댓값은 $625\,\mathrm{cm}^2$

5. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 하고
$z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$라 할 때, $z\overline{z}$의 값을 구하면?
(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서
$w,\ \overline{w}$는 $x^2 + x + 1 = 0$의
두 근이므로 근과 계수의 관계에서
$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$
또한, $z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$에서 $\overline{z} = \dfrac{\overline{w} + 1}{2\overline{w} + 1}$이므로

$$z\overline{z} = \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$
$$= \frac{w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 1}{4w\overline{w} + 2(w + \overline{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$
$\therefore\ w^2 + w + 1 = 0$, $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 라 하자

$$z = \frac{w+1}{2w+1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$
$$z\overline{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

6. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$ ④ 2ω ⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$