1. 길이가 24cm 인 철사로 넓이가 32cm^2 인 직사각형을 만들려고 한다. 가로의 길이가 세로의 길이보다 길 때, 이 직사각형의 가로의 길이는?

① 8 cm ② 7 cm ③ 6 cm ④ 5 cm ⑤ 4 cm

해설

가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(12-x)$ cm
또, (가로의 길이)> (세로의 길이)이므로 $x > 12-x$, 즉 $x > 6$ 이다.
$x(12-x) = 32$
$(x-4)(x-8) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = 8$
$\therefore\ x > 6$ 이므로 $x = 8$ 이다.
따라서 가로의 길이는 8 cm 이다.

2. 어떤 원의 반지름의 길이를 5cm 늘였더니, 그 넓이는 처음 원의 넓이의 6 배가 되었다. 처음 원의 반지름의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $1+\sqrt{6}$

해설

$\pi(x+5)^2 = 5\pi x^2$
$x^2 + 10x + 25 = 6x^2$
$5x^2 - 10x - 25 = 0$
$x^2 - 2x - 5 = 0$
$x = 1 + \sqrt{6} (\because x > 0)$

3. 아래 이차함수의 그래프의 폭이 좁은 것부터 차례로 나타내어라.

㉠ $y=2x^2$	㉡ $y=-5x^2$
㉢ $y=\frac{1}{3}x^2$	㉣ $y=-x^2$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉣

▷ 정답 : ㉢

해설

이차항의 계수의 절댓값이 큰 것부터 찾아 나열한다.

4. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -32 ② -16 ③ -8 ④ -4 ⑤ 4

해설

$y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$y = -2(x+3)^2 = -2x^2 - 12x - 18$
$\therefore\ a = -2,\ b = -12,\ c = -18$
$\therefore\ a + b + c = -32$

5. 이차함수 $y=(x-1)^2-2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 포물선의 식은?

① $y=(x-1)^2+2$ ② $y=(x+1)^2+2$

③ $y=(x-1)^2-2$ ④ $y=-(x+1)^2+2$

⑤ $y=-(x-1)^2+2$

해설

y 대신에 $-y$ 를 대입하면 $y=-(x-1)^2+2$ 이다.

6. 두 양수 $a,\ b$가 $(a+b)^2-2(a+b)-15=0,\ a-b=1$을 만족할 때, ab의 값은?

① -4 ② -6 ③ 4 ④ 6 ⑤ 5

해설

$a+b=t$로 치환하면 $(t+3)(t-5)=0$

$t=-3$ 또는 5

i) $\begin{cases} a+b=-3 \\ a-b=1 \end{cases}$ 또는

ii) $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=1 \end{cases}$

i)에서 $a=-1,\ b=-2$이므로 $a,\ b$가 양수라는 조건에 맞지 않다.

ii)에서 $a=3,\ b=2$

$\therefore ab=6$

7. 이차방정식 $x^2-4x+3=0$ 의 두 근의 차가 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 한 근일 때, k 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ −3　⑤ −4

해설

준식 : $(x-1)(x-3)=0$ 이므로 $x=1$ 또는 $x=3$
따라서 두 근의 차는 $3-1=2$ 이다.
$x=2$ 가 $2x^2-5x+k=0$ 의 한 근이므로 대입하면
$2(2)^2-5(2)+k=0$
$\therefore k=2$

8. 다음 이차함수를 $y=\frac{1}{3}(x-p)^2-5$로 나타낼 수 있다. 이 때, 꼭짓점이 $(p,-5)$ 라고 할 때, apq의 값은?

$y=ax^2+6x+q$

① -45 ② -54 ③ -66 ④ -76 ⑤ -80

해설

$$y=\frac{1}{3}(x-p)^2-5$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-2px+p^2)-5$$
$$=\frac{1}{3}x^2-\frac{2px}{3}+\frac{p^2}{3}-5$$

따라서 $a=\frac{1}{3}, \ -\frac{2}{3}$

$p=6, \ p=-9, \ q=22$ 이므로 $apq=-66$ 이다.

9. 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2px + 5$ 의 축의 방정식이 $x = 2$ 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

축이 $x = 2$ 이므로

$y = \frac{1}{2}x^2 + 2px + 5$

$= \frac{1}{2}(x-2)^2 + q$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 + q$

$2p = -2 \quad \therefore \ p = -1$

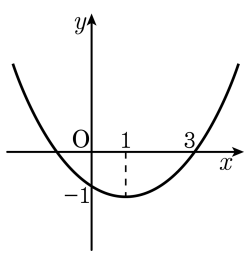
10. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 점 $(m, -12)$ 를 지난다고 한다. 이 때, m 의 값들의 합은?

① -1 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -3x^2$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면 $y = -3(x+1)^2$ 이고, 점 $(m, -12)$ 을 지나므로 $-12 = -3(m+1)^2$ 이다.
따라서 $m = 1$ 또는 $m = -3$ 이므로 합은 -2 이다.

11. 다음 그림과 같은 포물선의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 라 할 때, $a+p+q$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

축의 방정식이 $x=1$ 이므로 $y = a(x-1)^2 + q$

두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ -1)$ 을 지나므로

$0 = 4a + q \cdots$ ㉠

$-1 = a + q \cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$a = \frac{1}{3},\ q = -\frac{4}{3}$

$\therefore\ y = \frac{1}{3}(x-1) - \frac{4}{3}$

$\therefore\ a+p+q = \frac{1}{3} + 1 - \frac{4}{3} = 0$

12. 축의 방정식이 $x=4$이고, 두 점 $(2,-10),(3,-4)$를 지나는 포물선의 y절편은?

① -30 ② -32 ③ -34 ④ -36 ⑤ -38

해설

$y=a(x-4)^2+q$에 두 점 $(2,-10),(3,-4)$를 각각 대입하면
$4a+q=-10, a+q=-4$
$\therefore a=-2, q=-2$
$y=-2(x-4)^2-2$에 $x=0$을 대입하면 $y=-34$

13. 다음 [보기] 중 최솟값이 같은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y=-(x+1)^2-3$　　㉡ $y=2(x-1)^2-3$

㉢ $y=-3x^2-6x-6$　　㉣ $y=x^2-3$

㉤ $y=\frac{1}{3}(x-1)^2+3$　　㉥ $y=-x^2+3$

① ㉠,㉡, ㉢, ㉣　② ㉠,㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉤,㉥　⑤ ㉠, ㉥

해설

$y=a(x-p)^2+q$에서 a의 부호가 양이고, q의 값이 같은 것을 찾는다.

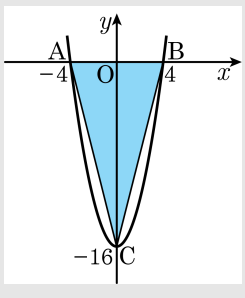
14. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 64

해설

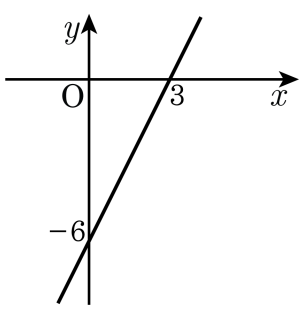
x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 $(0, -16)$ 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

15. $ax - y + b = 0$ 의 그래프가 다음 그래프와 같을 때, 이차방정식 $x^2 + bx + 4a = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 한다. $\alpha^2 + \beta^2$ 을 구하면?



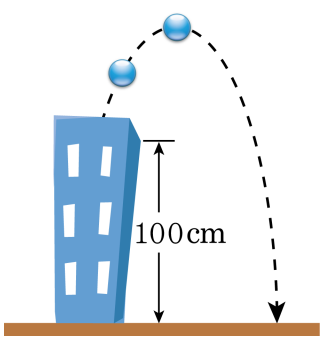
① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

두 점 $(3,0), (0,-6)$ 을 $ax - y + b = 0$ 에 각각 대입하면 $a = 2$, $b = -6$ 이므로 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 이다.
두 근을 각각 α, β 라 할 때,
두 근의 합 $\alpha + \beta = 6$, 두 근의 곱 $\alpha\beta = 8$ 이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 6^2 - 2 \cdot 8 \\ &= 36 - 16 \\ &= 20\end{aligned}$$

16. 지면으로부터 100m 되는 건물의 높이에서 초속 40m 로 위에 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 t 와 h 사이에는 $h = -5t^2 + 40t + 100$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 지면으로부터 160m 인 지점을 지날 때부터 최고점에 도달하기까지 걸리는 시간과 최고점의 높이는?



① 2 초, 170m ② 3 초, 175m ③ 2 초, 175m

④ 3 초, 180m ⑤ 2 초, 180m

해설

$-5t^2 + 40t + 100 = 160$

$t^2 - 8t + 12 = 0$

$(t-2)(t-6) = 0$

$\therefore\ t = 2$ 또는 $t = 6$

물체가 올라갔다 떨어지는 것이므로 처음으로 160m 를 지나는 시간부터 최고점까지

올라가는데 걸리는 시간은 두 시간 간격사이의 절반이다.

$t = \dfrac{6-2}{2} = 2$(초)

최고점까지의 거리는 물체가 4 초만큼 움직인 거리이므로

$h = -5t^2 + 40t + 100$

$= -5(4^2) + 40 \times 4 + 100$

$= 180$(m)

17. 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 m 만큼 평행이동하면 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 지난다고 할 때, m 의 값은?

① 4 ② 5 ③ −5 ④ −3 ⑤ −2

해설

$y=-\frac{2}{3}x^2+m$ 에 점 $(\sqrt{3},\ -5)$ 를 대입하면

$-5=-\frac{2}{3}(-\sqrt{3})^2+m$

$\therefore m=-3$

18. 포물선 $y = x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$ 이 x 축과 만나는 두 점의 사이의 거리가 1 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{1}{2}$

해설

$y = x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$ 의

x 절편을 α, β $(\alpha > \beta)$ 라고 하면

$\alpha + \beta = -2a$, $\alpha\beta = a - \frac{1}{2}$ 이다.

$\alpha - \beta = 1$ 이므로

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이다.

$1 = 4a^2 - 4a + 2$

$4a^2 - 4a + 1 = 0$

$(2a - 1)^2 = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}$

19. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 (x < 0) \\ 3x^2 (x \geq 0) \end{cases}$ 의 그래프 위의 점 P 와 점 A$(2, 0)$ 에 대하여 삼각형 POA 의 넓이가 24 일 때, 점 P 의 x 좌표들의 곱을 구하면?

① $-6\sqrt{3}$ ② $-7\sqrt{3}$ ③ $-8\sqrt{3}$
④ $-9\sqrt{3}$ ⑤ $-10\sqrt{3}$

해설

점 P(a, b) 라고 하면 $b > 0$ 이므로 (△POA의 넓이) $= \frac{1}{2} \times 2 \times b =$ 24 이다.
따라서 $b = 24$ 이다.
P$(a, 24)$ 인 a 의 값을 구하면
(i) $a < 0$ 일 때
$y = x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면
$24 = a^2$, $a = -2\sqrt{6}$
(ii) $a \geq 0$ 일 때
$y = 3x^2$ 에 $(a, 24)$ 를 대입하면
$24 = 3a^2$, $a = 2\sqrt{2}$
(i), (ii) 에서 P$(-2\sqrt{6}, 24)$ 또는 P$(2\sqrt{2}, 24)$ 이다.
따라서 점 P 의 x 좌표들의 곱은
$-2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = -8\sqrt{3}$ 이다.

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = ax^2 + bx + c$
$= a(x-2)^2 + 4$
점 $(3,\ 6)$ 을 지나므로 $a(3-2)^2 + 4 = 6$
$\therefore a = 2$

21. 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이 연속하는 정수이고, q 가 소수일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단 p 는 자연수)

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

두 근을 α, $\alpha + 1$ (α 는 정수) 이라 하면

$\alpha + (\alpha + 1) = 2\alpha + 1 = -p$,

$\alpha = \dfrac{-p - 1}{2} \cdots ㉠$

$\alpha(\alpha + 1) = q \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하여

정리하면 $p^2 - 4q = 1 \cdots ㉢$

㉡으로부터 q 는 짝수가 됨을 알 수 있고 q 는 소수이므로 $q = 2$

$q = 2$ 를 ㉢에 대입하면 자연수 $p = 3$

$\therefore\ p = 3,\ q = 2$

$\therefore p + q = 3 + 2 = 5$

22. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 p, q 일 때, 이차방정식 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$ 의 두 근을 각각 p, q 에 관한 식으로 나타내어라. (단, $abc\neq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=\dfrac{q}{p}$

▷ 정답 : $x=\dfrac{p}{q}$

해설

$ax^2+bx+c=0$ 에서 $p+q=-\dfrac{b}{a}$, $pq=\dfrac{c}{a}$

$\therefore\ b=-a(p+q)$, $c=apq$

$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$ 에서

$b^2-2ac=a^2(p+q)^2-2a^2pq=a^2p^2+a^2q^2$ 이므로

$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=a^2pqx^2-a^2(p^2+q^2)x+a^2pq=0$

양변을 a^2 으로 나누면

$pqx^2-(p^2+q^2)x+pq=0$

$(px-q)(qx-p)=0$

따라서 $x=\dfrac{q}{p}$ 또는 $x=\dfrac{p}{q}$ 이다.

23. $\dfrac{7}{3+\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, b 는 이차방정식 $ax^2 - kx - m = 0$ 의 한 근이다. 이때, 유리수 k, m 의 차 $k - m$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\frac{7}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3-\sqrt{2})}{7} = 3 - \sqrt{2} = 1.\times\times$$

$\therefore a = 1,\ b = 2 - \sqrt{2}$

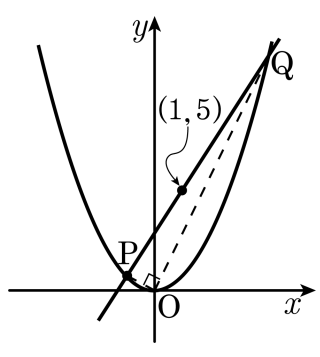
$2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}$ 가 $ax^2 - kx - m = 0$ 의 근이므로

$\dfrac{k}{a} = 4,\ -\dfrac{m}{a} = 2$

$\therefore k = 4,\ m = -2$

$\therefore k - m = 4 - (-2) = 6$

24. 다음 그림과 같이 점 $(1, 5)$를 지나는 직선이 포물선 $y = x^2$과 원점이 아닌 두 점 P, Q에서 만난다. $\angle POQ = 90°$ 일 때, 직선 PQ의 방정식은?



① $y = x + 4$ ② $y = 2x + 3$ ③ $y = 3x + 2$

④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

해설

직선 PQ의 기울기를 a라 하면 점 $(1, 5)$를 지나므로 $y - 5 = a(x - 1)$

$\therefore y = ax - a + 5$

$y = x^2$, $y = ax - a + 5$의 교점의 x좌표를 α, β라 할 때,

α, β는 방정식 $x^2 = ax - a + 5$, 즉 $x^2 - ax + a - 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉠의 근이다.

점 P (α, α^2), Q (β, β^2)이고, 직선 PO와 QO의 기울기는 각각

$\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$이고,

$\overline{PO} \perp \overline{QO}$이므로 $\alpha\beta = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a - 5 = -1$ ($\because$ 근과 계수관계)

$\therefore a = 4$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = 4x + 1$

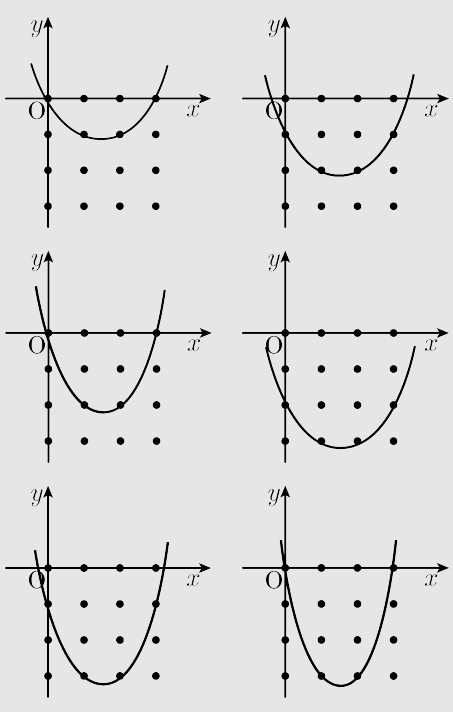
25. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \le y \le \frac{1}{2}$의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 원점을 포함한 4개의 점을 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3이고 y 좌표가 될 수 있는 정수는 −3, −2, −1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 6개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 6개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 12개이다.