1. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 이 중근을 가질 때, 다음 중 옳은 것은?

① $b^2-4ac=0$ ② $c=a^2$ ③ $x=\dfrac{b}{2a}$

④ $b^2-4ac<0$ ⑤ $ac>0$

해설

이차방정식이 중근을 가지면 $D=b^2-4ac=0$ 이다.

2. 이차함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x) = x^2 - 2$ 일 때, 함숫값을 구한 것 중 옳지 않은 것은?

① $f(-1) = -1$　② $f(0) = -2$　③ $f(1) = 1$

④ $f(2) = 2$　⑤ $f(3) = 7$

해설

③ $f(1) = 1^2 - 2 = -1$

3. 이차함수 $y = 3 - \frac{1}{4}x^2$ 의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x = 0$ 을 대입하면 $y = 3$ 이다.

4. $y = -2x^2$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동했더니 $(2,\ a)$ 를 지난다고 한다. a 의 값을 구하면?

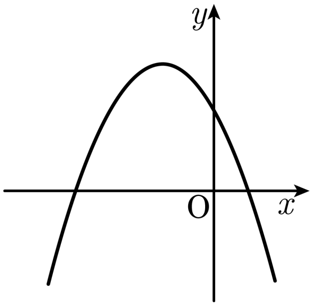
① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = -2x^2 \ \Rightarrow \ y = -2(x-3)^2 + 1$

$a = -2(2-3)^2 + 1 = -1$

5. 다음 그래프는 $y = ax^2 - bx + c$ 의 그래프이다. a, b, c 의 부호는?



① $a > 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$

② $a < 0,\ \ b > 0,\ \ c > 0$

③ $a > 0,\ \ b > 0,\ \ c < 0$

④ $a < 0,\ \ b > 0,\ \ c < 0$

⑤ $a < 0,\ \ b > 0,\ \ c = 0$

해설

위로 볼록하므로 $a < 0$

대칭축이 y 축의 왼쪽에 있으므로 $-ab > 0$

$ab < 0$

$\therefore b > 0$

y 절편이 양수이므로 $c > 0$

6. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$ 의 두 근을 α ,β 라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① $2+2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$

④ -6 ⑤ $2-2\sqrt{2}$

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\times(-1)}{-1}=-6$$

7. x 에 관한 이차방정식 $2x^2 - ax - b = 0$ 의 한 근이 $2 - \sqrt{5}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 6

해설

$2x^2 - ax - b = 0$ 의 계수가 모두 유리수이므로
$2 - \sqrt{5}$ 가 근이면 $2 + \sqrt{5}$ 도 근이다.
근과 계수의 관계에서

$$\frac{a}{2} = (2 - \sqrt{5}) + (2 + \sqrt{5}),\ a = 8$$

$$-\frac{b}{2} = (2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}),\ -\frac{b}{2} = -1,\ b = 2$$

$\therefore\ a - b = 6$

8. 차가 5 인 두 자연수의 곱이 126 일 때, 두 수 중 작은 수로 알맞은 것을 고르면?

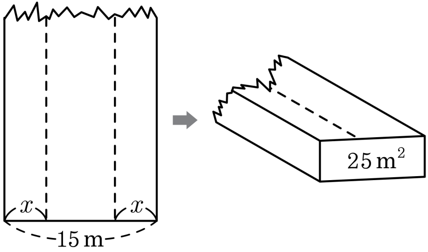
① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$$x(x+5)=126$$
$$x^2+5x-126=0$$
$$(x+14)(x-9)=0$$

$x=9$ 또는 $x=-14$
따라서 x 는 자연수이므로 $x=9$ 이다.

9. 다음 그림과 같이 너비가 15 m 인 철판을 직사각형 모양으로 접어서 물통을 만들려고 한다. 단면의 넓이가 $25\,\text{m}^2$ 일때, x 의 값을 구하는 식으로 옳은 것은?



① $2x^2 - 25x + 15 = 0$

② $2x^2 - 15x - 25 = 0$

③ $25x^2 - 6x + 6 = 0$

④ $2x^2 - 15x + 25 = 0$

⑤ $2x^2 - 25x - 15 = 0$

해설

$(15 - 2x)x = 25$

$\therefore\ 2x^2 - 15x + 25 = 0$

10. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 원점이 꼭짓점이다.

② a의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 좁아진다.

③ $a < 0$일 때, 위로 볼록하다.

④ $y = -ax^2$ 의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

⑤ 축의 방정식은 $x = 0$이다.

해설

② a의 절댓값이 작을수록 그래프의 폭이 넓어진다.

11. 이차함수 $y = x^2 - 8x + 2k - 3$ 의 꼭짓점이 직선 $y = x + 3$ 위에 있다고 한다. 이때, k 의 값을 구하면?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

$y = x^2 - 8x + 2k - 3 = (x-4)^2 + 2k - 19$

꼭짓점 $(4,\ 2k-19)$ 가 $y = x + 3$ 위에 있으므로 $2k - 19 = 7$,

$2k = 26$

$\therefore k = 13$

12. 이차함수의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나는 것을 모두 고르면?

① $y = 4x^2 - 4x + 1$

② $y = x^2 - 3x + 2$

③ $y = 2x^2 + 3x + 4$

④ $y = -2x^2 + 4x - 3$

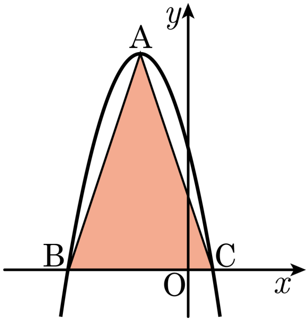
⑤ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$

해설

② $3^2 - 4 \times 2 > 0$

⑤ $(-1)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

13. 다음 그림은 $y=-x^2-4x+5$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 꼭짓점의 좌표를 A, x 축과 만나는 점을 B, C라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 30 ② 27 ③ 24 ④ 21 ⑤ 18

해설

$$y=-x^2-4x+5$$
$$=-(x^2+4x+4-4)+5$$
$$=-(x+2)^2+9$$

꼭짓점의 좌표는 $(-2,\ 9)$ 이고

$-x^2-4x+5=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0 \Rightarrow x=-5$ 또는 $x=1$ 에서 $B(-5,\ 0),\ C(1,\ 0)$ 이다.

따라서 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$ 이다.

14. $x=-1$ 일 때, 최댓값 5 를 갖고, 점 $(0,\ 2)$ 를 지나는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -5 ③ -7 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y=a(x+1)^2+5$ 에 $(0,\ 2)$ 를 대입하면 $a=-3$

$y=-3(x+1)^2+5=-3x^2-6x+2$

$\therefore a+b+c=-7$

15. 직선 $y = ax + b$ 의 그래프가 2, 3, 4 분면을 지날 때, x 에 대한 이차 방정식 $ax^2 + bx + 1 = 0$ 근의 개수에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② 하나의 중근을 갖는다.

③ 근은 존재하지 않는다.

④ 근의 개수는 무한하다.

⑤ 알 수 없다.

해설

직선 $y = ax + b$ 의 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로 $a < 0,\ b < 0,$

$ax^2 + bx + 1 = 0$ 에서 $D = b^2 - 4a > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16. 자연수 1에서 n까지의 합은 $\frac{n(n+1)}{2}$이다. 자연수 4부터 n까지의 합이 85일 때, n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$(4+5+6+\cdots n)=(1+2+\cdots n)-(1+2+3)$

$\frac{n(n+1)}{2}-6=85$이므로

$n(n+1)=182$

$n^2+n-182=0$

$(n-13)(n+14)=0$

$n>0$이므로 $n=13$이다.

17. 사랑이는 초콜릿 91 개를 사서 반 친구들에게 똑같이 나누어 주었더니, 한 사람이 가진 초콜릿의 수가 반 친구들의 수보다 6 개가 적었다고 한다. 반 친구들의 수는 모두 몇 명인지 구하여라.

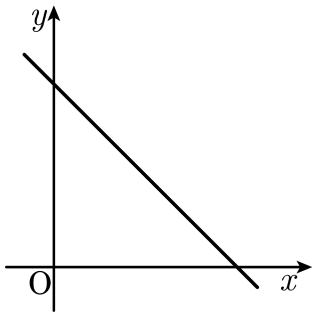
▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 13 명

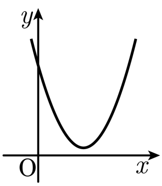
해설

반 친구들을 x 라고 하면,
$x(x-6)=91$ 이므로
$x^2-6x-91=0$
$(x+7)(x-13)=0$
따라서 $x=13$ (x 는 자연수)이다.

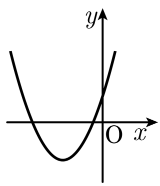
18. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



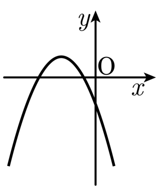
①



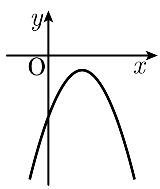
②



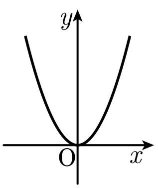
③



④



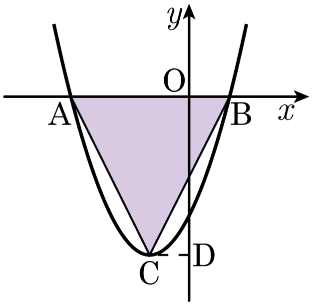
⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

19. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

$\mathrm{C}(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

$\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$

$\therefore \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

20. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t-5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　② 7 초 후　③ 8 초 후

④ 10 초 후　⑤ 알 수 없다.

해설

$y = 50t - 5t^2$

$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25) = -5(t-5)^2 + 125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가 된다.

21. 이차방정식 $p^2x^2-3x-q=0$ 이 서로 다른 두 자연수 $\alpha,\ \beta$ 를 근으로 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+p^2+q^2$ 의 값을 구하여라. (단, $p,\ q$는 정수)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 10

해설

$p^2x^2-3x-q=0$ 은 서로 다른 두 자연수 $\alpha,\ \beta\ (\alpha\neq\beta)$ 를 근으로 가지므로

$$\alpha+\beta=\frac{3}{p^2},\ \alpha\beta=-\frac{q}{p^2}$$

이때, $\alpha,\ \beta$ 가 자연수이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{3}{p^2}$ 도 자연수이다.

$\therefore\ p^2=1$ 또는 $p^2=3$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$ 또는 $\alpha+\beta=1$

여기서 $\alpha,\ \beta$ 는 서로 다른 자연수이므로 $\alpha+\beta=1$ 이 될 수 없다.

따라서 $p^2=1$ 이고 $\alpha+\beta=3$ 이다.

$\alpha+\beta=3$ 에서 $\alpha=1,\ \beta=2$ 또는 $\alpha=2,\ \beta=1$

$\alpha\beta=-\dfrac{q}{p^2}$ 이므로 $q=-2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+p^2+q^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+p^2+q^2=4+1+1+4=10$

22. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ 로 잘못 알고 어떤 이차방정식을 풀어서 두 근 -2, 5 를 얻었다. 이 이차방정식을 올바르게 풀었을 때의 근을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-\dfrac{5}{2}$

▷ 정답 : $x=1$

해설

$x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ 가 두 근이므로

$$\begin{aligned}\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}&=\frac{2b}{a}\\&=-2+5\\&=3\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $3a=2b$, $b=\dfrac{3}{2}a$

$$\begin{aligned}\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}\times\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}&=\frac{4c}{a}\\&=(-2)\times5\\&=-10\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{5}{2}$ 이므로 $5a=-2c$, $c=-\dfrac{5}{2}a$

따라서 $ax^2+bx+c=0$ 에서 $ax^2+\dfrac{3}{2}ax-\dfrac{5}{2}a=0$ 이다.

그런데 $a\neq0$ 이므로

$2x^2+3x-5=0$

$(2x+5)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{5}{2},\ x=1$

23. $f(2)=16$, $f(x)=f(x^4)\cdot(-x^2+2x+4)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-16)=\dfrac{a}{b}$ 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 서로소이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$f(x)=f(x^4)\cdot(-x^2+2x+4)$ 에서 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=f(16)\times 4$

$\therefore\ f(16)=4$

$f(x)=f(x^4)\cdot(-x^2+2x+4)$ 에서

$f(x^4)=\dfrac{f(x)}{(-x^2+2x+4)}$ 이고

$f(x^4)\cdot(-x^2-2x+4)=f(-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^4)\cdot(-x^2-2x+4) \\ &= \frac{f(x)}{(-x^2+2x+4)}\cdot(-x^2-2x+4) \end{aligned}$$

이 식에 $x=16$ 을 대입하면

$f(-16)=\dfrac{4}{(-284)}\times(-220)=\dfrac{220}{71}$ 이다.

$a=220,\ b=71$

따라서 $a-b=149$ 이다.

24. 이차함수 $y = 2x^2 - ax - b$ 는 $x = -p$ 일 때, 최솟값 -2를 갖고, 그 그래프는 점 $(1, p^2)$ 을 지난다. 이때, 상수 a , b , p 의 합 $a+b+p$ 의 값을 구하면? (단, $p < 0$)

① 12 ② 0 ③ -18 ④ 42 ⑤ -14

해설

$y = 2(x+p)^2 - 2$

$$\begin{aligned} p^2 &= 2(1+p)^2 - 2 \\ &= 2(p^2 + 2p + 1) - 2 \\ &= 2p^2 + 4p \end{aligned}$$

$p^2 + 4p = 0,\ p(p+4) = 0,\ p = 0,\ \ -4$

$\therefore\ \ p = -4(\because p < 0)$

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4)^2 - 2 \\ &= 2(x^2 - 8x + 16) - 2 \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

$a = 16$, $b = -30$

$\therefore a + b + p = 16 + (-30) + (-4) = -18$

25. $-1 \le \dfrac{p}{2} \le 0,\ p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 $p,\ q$ 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q\ (0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + q - \dfrac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \dfrac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\dfrac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\dfrac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore\ m = q - \dfrac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \le 2$ 에서 $q \le -\dfrac{p}{2} + 1$

$\therefore\ m \le -\dfrac{p^2}{4} - \dfrac{p}{2} + 1 = -\dfrac{1}{4}(p+1)^2 + \dfrac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}$ 이다.