1. 두 다항식 $A = 5x^3 + x^2 - 6x + 7$, $B = 2x^3 - 4x^2 - 1$에 대하여 $2A - 3B$를 계산한 식에서 x^2의 계수는 얼마인가?

① 14　② -12　③ 4　④ 17　⑤ 18

해설

$2A - 3B$
$= 2(5x^3 + x^2 - 6x + 7) - 3(2x^3 - 4x^2 - 1)$
$= 4x^3 + 14x^2 - 12x + 17$

$\therefore$ x^2의 계수 : 14

해설

이차항만 뽑아서 계산한다.
$2A - 3B \Rightarrow 2(x^2) - 3(-4x^2) = 2x^2 + 12x^2 = 14x^2$

2. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ 의 차수는?

① 5차 ② 7차 ③ 12차 ④ 17차 ⑤ 72차

해설

$(x^2+1)^4$ 는 8차식, $(x^3+1)^3$ 은 9차식
따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^3$ 은
$8+9=17$차 다항식이다.

3. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 1$

▷ 정답: $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

4. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$

$\qquad\qquad=ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$

$a=3$, $-2a+b=5$, $a+b+c=0$

$\therefore$ $a=3$, $b=11$, $c=-14$

$\therefore$ $a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3$, $b=11$, $c=-14$

$\therefore$ $a+b-c=28$

5. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
$\therefore\ 2^5 = 32$

6. 다항식 x^3-2x^2+5x-6을 일차식 $x-2$로 나눌 때의 나머지는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$f(x)=x^3-2x^2+5x-6$
$\quad=(x-2)Q(x)+R$

$\therefore\ f(2)=2^3-2\cdot2^2+5\cdot2-6$
$\quad=8-8+10-6$
$\quad=4$

$\therefore\ R=4$

7. 다항식 $ax+ay-bx-by$를 인수분해 하면?

① $x(a-b)$　② $(a-b)(x-y)$　③ $(a+b)(x-y)$
④ $(a-b)(x+y)$　⑤ $(a+b)(x+y)$

해설

$$\begin{aligned} ax+ay-bx-by &= a(x+y)-b(x+y) \\ &= (a-b)(x+y) \end{aligned}$$

8. 다음 보기의 복소수 중 실수인 것의 개수는?

보기

$2i$, $1+\sqrt{-4}$, $3+4i$, 9, i^2+1

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a+bi$ 에서 $b=0$ 인 경우, 즉 허수 부분이 0이면 실수이다.
$2i$ 의 허수 부분은 2, $1+\sqrt{-4}=1+2i$ 에서 허수 부분은 2이고,
$3+4i$ 의 허수 부분은 4이다.
9와 $i^2+1=-1+1=0$ 의 허수 부분은 0이다.
따라서 실수인 것은 9와 i^2+1 로 두 개다.

9. 등식 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=1-\dfrac{i}{5}$ 를 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $16xy$ 의 값은?

① 97 ② 98 ③ 99 ④ 100 ⑤ 101

해설

(좌변) $=\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}$

$=\dfrac{x(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+\dfrac{y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$\dfrac{(x+y)+2(y-x)i}{5}$ 이므로

$\dfrac{x+y}{5}+\dfrac{2(y-x)i}{5}=1-\dfrac{i}{5}$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{x+y}{5}=1$, $\dfrac{2(y-x)}{5}=-\dfrac{1}{5}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{11}{4}$, $y=\dfrac{9}{4}$

$\therefore\ 16xy=16\cdot\dfrac{11}{4}\cdot\dfrac{9}{4}=99$

10. $\dfrac{2+3i}{3-i}$ 를 계산하면?

① $\dfrac{3}{8}+\dfrac{13}{8}i$ ② $\dfrac{3}{10}+\dfrac{11}{10}i$ ③ $\dfrac{3}{10}-\dfrac{11}{10}i$
④ $\dfrac{3}{8}-\dfrac{13}{8}i$ ⑤ $\dfrac{4}{9}+\dfrac{11}{9}i$

해설

$$\frac{2+3i}{3-i}=\frac{(2+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$$

11. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= 4^2 - 2 \cdot 7 \\ &= 16 - 14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

12. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\frac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)
② $-5i$ 는 순허수 (○)
③ $i^3=-i$ 허수(○)
④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)
⑤ $1-\frac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

13. 이차방정식 $x^2-mx+2m+1=0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2-mx+2m+1=0$에 $x=1$을 대입하면
$1-m+2m+1=0 \quad \therefore m=-2$
$x^2+2x-3=0, \quad (x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-3,\ 1$
따라서, 다른 근은 -3

14. 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 8-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=11\end{aligned}$$

15. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8　　② -1　　③ 0　　④ 5　　⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

16. 다항식 $x^3 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 1$로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로

$x^2 = x - 1$을 대입하면

$ax + (b - 1) = 0$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로,

$a = 0, b - 1 = 0$

$\therefore\ a = 0,\ b = 1$

$\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$

$= (x^2 - x + 1)Q(x)$

$= (x^2 - x + 1)(x + b)$

$\therefore\ b = 1,\ a = 0$

17. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1)=P(2)=P(3)=0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4)=3\times2\times1=6$

18. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

19. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$ 꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

20. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$　② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$　③ $-\frac{7}{2},\ 2$
④ $-\frac{2}{7},\ 2$　⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$

$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$

$7m^2-12m-4=0$

$(7m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

21. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$

$\therefore k>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

22. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

23. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

24. 함수 $y=-x^2-2x+5$ ($-2 \le x \le 2$)의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

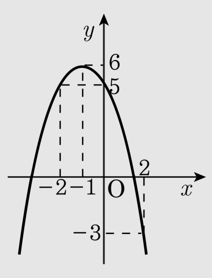
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

25. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

26. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

27. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

28. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z)가 바르게 짝지어진 것은?

$$3x-y=y+z=3x-z=1$$

① $(1, 1, 1)$ ② $(-1, 1, 2)$ ③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ ⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x-y=1,\ y+z=1,\ 3x-z=1$

변변끼리 모두 더하면, $6x=3,\ x=\frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

29. 연립 방정식 $\begin{cases} x-y=5 \\ y+z=5 \\ z-x=2 \end{cases}$ 에서 $x+y+z$를 구하면?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

세 다항식을 더하면, $2z=12$, $z=6$
$y+6=5$, $y=-1$
$x+1=5$, $x=4$
$\therefore\ x+y+z=4-1+6=9$

30. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=3$

▷ 정답: $y=-1$

▷ 정답: $z=2$

해설

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7$ ⋯⋯㉠

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11$ ⋯⋯㉡

$x+2y+3z=7$ ⋯⋯㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0$ ⋯⋯㉣

㉡ × 3 − ㉣ × 2를 하면 $11x=33$

∴ $x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1$, $z=2$

31. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설
주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots$㉣
㉣$-$㉡을 하면 $x=1$
㉣$-$㉢을 하면 $y=2$
㉣$-$㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

32. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} x+y=1 \cdots ㉠ \\ y+z=3 \cdots ㉡ \\ z+x=4 \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ $\Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4 \cdots$ ㉣

㉣ − ㉠ $\Rightarrow z=3$

㉣ − ㉡ $\Rightarrow x=1$

㉣ − ㉢ $\Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

33. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$　　② $(\sqrt{2} + 1,\ \sqrt{2})$　　③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$　　⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots \ ㉠ \\ x - y = 1 \ \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

34. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

35. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

36. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

37. $N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 6 개 ② 12 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 64 개

해설

$N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$
$\quad = (69+1)^3 = (2 \cdot 5 \cdot 7)^3$
따라서 N 의 양의 약수는 개수는 $4^3 = 64$

38. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

39. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면
$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$
이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$
$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$
$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

40. 방정식 $(x-1)^2+|x-1|-6=0$의 두 근의 합은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

(i) $x \geq 1$일 때
$x^2-2x+1+x-1-6=0$
$x^2-x-6=0$, $(x-3)(x+2)=0$이므로
$x=-2, x=3$
그런데 $x \geq 1$이므로 $x=3$
(ii) $x<1$일 때
$x^2-2x+1-x+1-6=0$
$x^2-3x-4=0, (x-4)(x+1)=0$
$x=-1, x=4$
그런데 $x<1$이므로 $x=-1$
(i), (ii)에서 $x=3, -1$이므로
두 근의 합은 2

41. x에 관한 이차방정식$x^2 + 2(m + a - 2)x + m^2 + a^2 - 3b = 0$이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a + 3b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$x^2 + 2 \cdot (m + a - 2)x + (m^2 + a^2 - 3b) = 0$

중근을 가지려면 $\dfrac{D}{4} = 0$

$(m + a - 2)^2 - 1 \cdot (m^2 + a^2 - 3b) = 0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m \cdot (2a - 4) + (4 - 4a + 3b) = 0$

$a = 2, 3b = 4a - 4 = 4$

$\therefore\ a + 3b = 6$

42. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한근이 $2-\sqrt{3}$일 때, $\frac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2-\sqrt{3}$이 근이면 $2+\sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{b}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)=4$

$\frac{c}{a}=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

$\therefore\ \frac{c-b}{a}=\frac{c}{a}+\left(-\frac{b}{a}\right)=1+4=5$

43. 어떤 공장에서 A, B의 두 제품을 생산하고 있다. A제품의 생산량은 작년에 비하여 $20\,\%$ 증가하였고, B제품은 $25\,\%$ 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B제품의 생산량을 구하면?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a, b라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$이다.
$a+b=70$, $1.2a+1.25b=86$
연립하여 풀면, $a=30$, $b=40$

44. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0　② $\sqrt{3}$　③ $-\sqrt{3}$　④ 1　⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\ &= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

45. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이므로 $n = 4k+2(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$\therefore\ 2+6+10 = 18$

46. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. a, b의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$　　② $a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

③ $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3}$　　④ $a=2,\ b=-\frac{1}{4}$

⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a\cdots\cdots$ ①

$\alpha\beta=b\cdots\cdots$ ②

$\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-a\cdots\cdots$ ③

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=b\cdots\cdots$ ④

③에서 $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$

$\therefore\ -a+\frac{-a}{b}=-a\quad\therefore\ -\frac{a}{b}=0\quad\therefore\ a=0$

④에서 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\frac{1}{b}+2=b,$

$\frac{1}{b}+2=0\quad\therefore\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

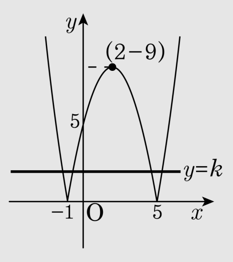
47. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $0<k<3$　② $0<k<5$　③ $3<k<5$
④ $1<k<4$　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

48. $yx^2 + yx + y = x^2 - x + 1$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 y 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면

$(y-1)x^2 + (y+1)x + y - 1 = 0$

(i) $y = 1$ 일 때, $2x = 0$

$\therefore x = 0$

(ii) $y \neq 1$ 일 때, 이 식을 x 에 대한 이차방정식으로 보면 x 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D = (y+1)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0$

$(3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 y 의 최댓값은 3 , 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 곱은 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ 이다.

49. 태은이네 가게에서 판매하고 있는 상품의 1개당 판매가격을 원래의 가격보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량은 $\frac{2}{3}x\%$ 감소한다고 한다. 이때, 판매 금액이 최대가 되게 하는 x의 값은?

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

해설

원래의 상품1개당 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하자.
가격을 $x\%$ 올리면 상품 1개당 판매 가격이
$a\left(1+\frac{x}{100}\right)$ 원, 판매량이 $b\left(1-\frac{2x}{300}\right)$ 개이므로
판매 금액은

$$ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{300}\right)$$
$$=ab\cdot\frac{100+x}{100}\cdot\frac{300-2x}{300}$$
$$=\frac{ab}{30000}(100+x)(300-2x)$$
$$=\frac{ab}{30000}(-2x^2+100x+30000)$$
$$=\frac{ab}{30000}\{-2(x-25)^2+31250\}$$

따라서 $x=25(\%)$ 일 때 판매 금액은 최대가 된다.

50. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $\omega + \frac{1}{\omega} = -1$

ㄴ $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 1$

ㄷ $(\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$x^3 = 1,$
$x^3 - 1 = 0,$
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$
$w^2 + w + 1 = 0 \cdots ①$
$\overline{w}^2 + \overline{w} + 1 = 0 \cdots ②$
ㄱ ① 식을 w로 나누면 $w + \frac{1}{w} = -1$
ㄴ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근 $w, \overline{w}$
$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$
$w^2 + \overline{w^2} = (w + \overline{w})^2 - 2w\overline{w} = 1 - 2 = -1$
ㄷ $(w+1)(\overline{w}+1)$
$= w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$
$\therefore$ ㄱ, ㄷ 맞음