1. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　　② 7, 18　　③ 8, 16
④ 9, 18　　⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$

2. $x^2+\frac{1}{x^2}=14(x>0)$ 일 때, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36 ② 44 ③ 52 ④ 68 ⑤ 82

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$이므로

$x+\frac{1}{x}=4$ $(\because x>0)$

$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})=52$

3. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1　② 4, 18　③ 8, −1　④ 9, −1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0$ $\therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$$

$$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

4. x의 이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x-a+3=0$ (a는 실수) 의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=-(a^2-a-12)=0$, $\alpha\beta=-a+3<0$
$\therefore\ a=4$

5. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+(k+3)=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k의 최댓값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

(ⅰ) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$\frac{D}{4}=(k-3)^2-1\cdot(k+3)\geq 0$

$k^2-7k+6\geq 0,\ (k-1)(k-6)\geq 0$

$\therefore k\leq 1,\ k\geq 6$

(ⅱ) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$2(k-3)<0,\ k+3>0$

$\therefore -3<k<3$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-3<k\leq 1$

$\therefore$ 정수 k의 최댓값은 1

6. 사차방정식 $x^4 - ax^2 + (a+1) = 0$이 서로 다른 두 개의 실근과 두 개의 허근을 갖기 위한 실수 a의 범위는?

① $a < -1$

② $a > 1$

③ $-1 < a < 2(1-\sqrt{2})$

④ $1 < a < 2(1+\sqrt{2})$

⑤ $2(1-\sqrt{2}) < a < 2(1+\sqrt{2})$

해설

$X = x^2$ 으로 놓으면,
$X^2 - aX + (a+1) = 0 \cdots\cdots$ ㉠
주어진 사차방정식이 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 방정식 ㉠이 양근 하나 음근 하나를 가져야 한다.
$\therefore$(두 근의 곱) $= a + 1 < 0$
$\therefore\ a < -1$

7. x에 관한 방정식 $x^4+ax^2+a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$(a, b는 실수)이 한 개의 중근(실근)과 두 허근을 갖도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 7

해설

$x^2=t$라 놓으면 $t^2+at+a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$
x가 한 개의 중근과 두 허근을 가지려면 t는 0과 음근 하나를 가져야 한다.
두 근의 합 : $-a<0 \quad \therefore\ a>0$
두 근의 곱 : $a^4-2a^2+b^2-4b+5=0$
$(a^2-1)^2+(b-2)^2=0$
$a^2=1,\ b=2$
$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0),\ b=2$
$\therefore\ a+b=3$

8. 다음 삼차방정식을 풀었을 때 두 허근의 합을 구하여라.

$$x^3 - x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $f(2) = 8 - 4 + 2 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 2$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & -6 \\ & & 2 & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

위의 조립제법에서 $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 3)$ 이므로 주어진 방정식은$(x - 2)(x^2 + x + 3) = 0$

$\therefore x = 2$, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

두 허근의 합은 -1

9. 삼차방정식 $x^3-7x^2+9x+9=0$의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3-7x^2+9x+9=0$

$(x-3)(x^2-4x-3)=0$

$x^2-4x-3=0$의 두 근이 a, b($\because$ 무리수)

$a+b=4$

10. 방정식 $x^{11}=1$의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$의 값은?

① 1　　② -1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$이므로 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$의 10개의 근이다.

$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로

$x=-1$을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$

$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

11. 삼차방정식 $x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}=0$의 세 근을 $\alpha, \beta, \gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때, $\alpha \le m \le \gamma$인 정수 m의 개수를 구하면?

① 23 개　② 24 개　③ 25 개　④ 26 개　⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}$이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3 \le m \le 2^5$

$\therefore$ 정수 m의 개수는 $2^5-2^3+1=25$