1. x, y 가 유리수일 때, $x(2-2\sqrt{2})+y(3+2\sqrt{2})$ 의 값이 유리수가 된다고 한다. $\frac{y}{x}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(주어진 식) $= 2x - 2x\sqrt{2} + 3y + 2y\sqrt{2}$

$= (2x + 3y) + (-2x + 2y)\sqrt{2}$

이 식이 유리수가 되기 위해서는

$-2x + 2y = 0$ (x, y는 유리수) 이 되어야 한다.

즉, $x = y$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{x}{x} = 1$

2. $-2+\sqrt{10}$의 정수부분을 A, 소수부분을 B라 할 때, $\dfrac{B+7A}{B-A}$의 값은?

① $\dfrac{-13-4\sqrt{10}}{3}$ ② $\dfrac{13-4\sqrt{10}}{3}$ ③ $-14-2\sqrt{10}$
④ $14+2\sqrt{10}$ ⑤ $18+2\sqrt{10}$

해설

$3<\sqrt{10}<4$ 이고 $1<\sqrt{10}-2<2$ 이므로
$-2+\sqrt{10}$ 의 정수부분 $A=1$
소수부분 $B=-3+\sqrt{10}$

$$\frac{-3+\sqrt{10}+7}{-3+\sqrt{10}-1}=\frac{4+\sqrt{10}}{-4+\sqrt{10}}$$
$$=\frac{(\sqrt{10}+4)^2}{-6}$$
$$=\frac{16+10+8\sqrt{10}}{-6}$$
$$=\frac{26+8\sqrt{10}}{-6}$$
$$=\frac{13+4\sqrt{10}}{-3}$$

3. 다음 제곱근표를 이용하여 $\sqrt{2004}$ 의 값을 구하면?

수	0	1	2	3	4
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010
5.0	2.230	2.238	2.241	2.243	2.245

① 44.72 ② 34.64 ③ 34.70 ④ 34.76 ⑤ 44.76

해설

$\sqrt{2004} = \sqrt{4 \times 501} = 2\sqrt{501}$

$= 2 \times \sqrt{5.01 \times 100}$

$= 20\sqrt{5.01}$

주어진 표에서 $5.01 = 2.238$

$\therefore 20 \times 2.238 = 44.76$

4. $a = \sqrt{3}$ 일 때, $\dfrac{a}{[a]+a}$ 의 소수 부분은? (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대의 정수)

① $\sqrt{3}-1$　　② $\sqrt{3}+1$　　③ $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

해설

$\left[\sqrt{3}\right] = 1$ 이므로

$$\frac{a}{[a]+a} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1.\cdots}{2.\cdots} = 0.\cdots$$

따라서 정수 부분은 0, 소수 부분은 $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ 이다.

5. $(x-1)^2+\dfrac{1}{(x-1)^2}-2$ 를 인수분해하면?

① $\dfrac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$ ② $\dfrac{x(x-2)^2}{(x-1)^2}$ ③ $\dfrac{x^2(x-2)^2}{(x-1)}$
④ $\dfrac{(x-2)^2}{(x-1)^2}$ ⑤ $\dfrac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2}$

해설

$x-1=a$ 로 치환하면

$(x-1)^2+\dfrac{1}{(x-1)^2}-2$

$=a^2+\dfrac{1}{a^2}-2=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=\left(\dfrac{a^2-1}{a}\right)^2$

$=\left\{\dfrac{(a+1)(a-1)}{a}\right\}^2$

$=\dfrac{x^2(x-2)^2}{(x-1)^2}$

6. $7x-5<4(x+1)$이고 x는 자연수일 때, $x^2-5x+6=0$를 풀면?

① $x=0,\ x=1$ ② $x=2$ ③ $x=2,\ x=3$
④ $x=3$ ⑤ $x=-2,\ x=3$

해설

$7x-5<4(x+1)$ 에서 $7x-4x<4+5$, $3x<9$ ∴ $x<3$
따라서 x의 값은 1, 2이다.
$x^2-5x+6=0$의 해는 $x=2,\ x=3$이므로 해는 $x=2$가 된다.

7. 임의의 실수 x 의 정수 부분이 a 일 때, $[x]=a$ 로 나타내기로 한다. $2 \le x < 3$ 일 때, 방정식 $[x]x^2-x-5[x]=0$ 의 해는?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$2 \le x < 3$ 이므로 $[x]=2$ 이다.
$[x]=2$ 를 대입하면 $2x^2-x-10=0$ 이고, 인수분해를 하면 $(2x-5)(x+2)=0$ 이다.
$\therefore x=\frac{5}{2}$ $(\because 2 \le x < 3)$

8. 이차방정식 $2x^2-7x+2=0$ 의 두 근 중에서 큰 것을 m 이라 하면 $n<m<n+1$ 이다.
정수 n 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x^2-7x+2=0, 2\left(x^2-\frac{7}{2}x\right)=-2$

$2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}\right)=-2+\frac{49}{8}$

$2\left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{33}{8}, \left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$

$x=\frac{7}{4}\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

$\therefore m=\frac{7+\sqrt{33}}{4}$

$5<\sqrt{33}<6$

$\frac{7+5}{4}<m<\frac{7+6}{4}, 3<m<3.25$

$3<m<4$

$\therefore n=3$

9. $\sqrt{59+a}=b$라 할 때, b가 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 a와 그 때의 b의 합 $a+b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

59 보다 큰 제곱수는 $64, 81, 100, \cdots$ 이므로
$59+a=64, 81, 100\cdots$
$\therefore a=5, 22, 41, \cdots$
따라서 가장 작은 자연수 $a=5$, $b=\sqrt{59+5}=8$이다.
$\therefore a+b=5+8=13$

10. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 이고, $S(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x)$ 이라고 한다. 100 이하의 자연수 n에 대하여 $S(n)$의 값이 자연수가 되는 n을 모두 고르면?

① 8　　② 15　　③ 35　　④ 50　　⑤ 99

해설

$S(n) = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n+1} - 1$

① $n = 8$일 때, $S(n) = 3 - 1 = 2$

② $n = 15$일 때, $S(n) = 4 - 1 = 3$

③ $n = 35$일 때, $S(n) = 6 - 1 = 5$

④ $n = 50$일 때, $S(n) = \sqrt{51} - 1$

⑤ $n = 99$일 때, $S(n) = 10 - 1 = 9$

따라서 ①, ②, ③, ⑤가 답이다.

11. $4x^2-4x-a$ 가 두 일차식의 곱으로 인수분해되고, 이 중 한 인수가 $2x+3$ 일 때, a 의 값은?

① -15 ② -6 ③ 3 ④ 6 ⑤ 15

해설

$4x^2-4x-a=(2x+3)(bx+c)$
$\qquad\qquad\quad =2bx^2+(3b+2c)x+3c$
$2b=4,\ b=2$
$2c+3b=-4,\ c=-5$
$-a=3c=-15,\ a=15$

12. 다항식 $(x^2-4)(x^2-2x-3)-21$ 를 인수분해했을 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2-x+1 ② x^2+x-1 ③ x^2-2x-1
④ x^2-x+3 ⑤ x^2-x+9

해설

$(x^2-4)(x^2-2x-3)-21$
$=(x+2)(x-2)(x-3)(x+1)-21$
$=(x+2)(x-3)(x+1)(x-2)-21$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)-21$
$x^2-x=\mathrm{A}$ 로 놓으면
$(\mathrm{A}-6)(\mathrm{A}-2)-21=\mathrm{A}^2-8\mathrm{A}+12-21$
$=\mathrm{A}^2-8\mathrm{A}-9$
$=(\mathrm{A}-9)(\mathrm{A}+1)$
$=(x^2-x-9)(x^2-x+1)$

13. 다항식 x^4-3x^2+1이 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해 될 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x^2=X$로 치환하면

$$\begin{aligned} x^4-3x^2+1 &= X^2-3X+1 \\ &= X^2-2X+1-X \\ &= (X-1)^2-X \\ &= (x^2-1)^2-x^2 \\ &= (x^2-1-x)(x^2-1+x) \\ &= (x^2-x-1)(x^2+x-1) \end{aligned}$$

이므로

$a=-1,\ b=-1,\ c=1,\ d=-1$이거나

$a=1,\ b=-1,\ c=-1,\ d=-1$

$\therefore a+b+c+d=-2$

14. 자연수 10^4-1 의 약수의 개수는?

① 10 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 28 개

해설

$$\begin{aligned}10^4-1 &= (10^2+1)(10^2-1)\\ &= (10^2+1)(10+1)(10-1)\\ &= 101\times11\times9\\ &= 3^2\times11\times101\end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는 $(2+1)(1+1)(1+1)=12$(개)

15. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $-3x^4 + 2x^2 - 5x$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 이므로

$x^2 = x - 1$

$$x^4 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$
$$= (x-1) - 2x + 1 = -x$$

$$-3x^4 + 2x^2 - 5x = 3x + 2(x-1) - 5x$$
$$= 3x + 2x - 2 - 5x = -2$$

16. $\sqrt{25}$ 의 양의 제곱근을 a , $\sqrt{81}$ 의 음의 제곱근을 b , $\sqrt{(-169)^2}$ 의 음의 제곱근을 c 라 할 때, $bc - \sqrt{5}a$ 의 제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\pm\sqrt{34}$

해설

$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ 의 제곱근은 $\pm\sqrt{5} \therefore a = \sqrt{5}$
$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$ 의 제곱근은 $\pm 3 \therefore b = -3$
$\sqrt{(-169)^2} = 169$ 의 제곱근은 $\pm 13 \therefore c = -13$
$bc - \sqrt{5}a = (-3) \times (-13) - \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 34$ 이므로
34 의 제곱근은 $\pm\sqrt{34}$ 이다.

17. 부등식 $4 \le 3x-2 < 8$을 만족하는 두 자연수가 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 근일 때, $\frac{a+b}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{30}$

해설

부등식 $4 \le 3x-2 < 8$을 풀면 다음과 같다.

$6 \le 3x < 10$

$2 \le x < \frac{10}{3}$

$\therefore x = 2,\ 3$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$a = 5,\ b = 6$

$\therefore \frac{a+b}{ab} = \frac{11}{30}$

18. $\sqrt{24a}$ 의 값이 자연수가 되는 두 자리 자연수 a 는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$\sqrt{24a}$ 가 자연수가 되기 위해서 $24a$ 는 완전제곱수가 되어야 한다.
$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 가장 작은 자연수 a 의 값은 6 이다.
따라서 두자리 수는 6×2^2 , 6×3^2 , 6×4^2 뿐이다.
$\therefore$ 3개다.

19. 세 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 각각 a, b, c 라 할 때, $\sqrt{60abc}$ 가 자연수가 될 경우는 몇 가지인지 구하여라. (단, $b > c$)

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 9 가지

해설

$\sqrt{60abc} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5 \times abc}$

$abc = 15$ 또는 $abc = 60$

$(a, b, c) = 15$ 일 때,

$(a, b, c) = (3, 5, 1)$, $(5, 3, 1)$, $(1, 5, 3)$

$abc = 60$ 일 때,

$(a,\ b,\ c) = (3,\ 5,\ 4)$, $(4,\ 5,\ 3)$, $(5,\ 4,\ 3)$, $(2,\ 6,\ 5)$, $(5,\ 6,\ 2)$, $(6,\ 5,\ 2)$

20. $\sqrt{19} < \sqrt{5x} < \sqrt{699}$ 를 만족하는 x 의 값 중에서 $\sqrt{5x}$ 가 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값은 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 5 개

해설

$\sqrt{19}$ 과 $\sqrt{699}$ 사이의 자연수 :
$\sqrt{5^2}$, $\sqrt{6^2}$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{8^2}$, $\cdots$, $\sqrt{24^2}$, $\sqrt{25^2}$, $\sqrt{26^2}$
이 중에서 5 의 배수는
$\sqrt{5^2}$, $\sqrt{10^2}$, $\sqrt{15^2}$, $\sqrt{20^2}$, $\sqrt{25^2}$
$\therefore$ 5 개

21. 유리수 a 와 무리수 b 에 대하여, 다음 보기 중 옳지 않은 것의 개수를 구하여라.

보기

㉠ $\sqrt{a}\times b$ 는 항상 무리수이다.

㉡ $b=a-\sqrt{3}$ 를 만족시키는 a, b 가 존재한다.

㉢ $\frac{b}{a}$ 는 항상 무리수이다.

㉣ $\frac{b}{\sqrt{a}}=1$ 을 만족시키는 a, b 가 존재한다.

㉤ $\sqrt{a}+b$ 는 유리수이다.

▶ 답: 개

▷ 정답: 2개

해설

㉠ $a=2$, $b=\sqrt{2}$ 일 때, $\sqrt{a}\times b=2$ 가 되어 유리수이므로 옳지 않다.
㉤ $a=3$, $b=\sqrt{3}$ 일 때, $\sqrt{a}+b=2\sqrt{3}$ 이 되어 무리수가 되므로 옳지 않다.
따라서 보기 중 옳지 않은 것의 개수는 2 개이다.

22. 한 변의 길이가 9 인 정사각형의 내부에 10 개의 점을 놓을 때, 두 점 사이의 거리가 r 이하인 두 점이 반드시 존재한다. 이때 r의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

한 변의 길이가 9 인 정사각형의 내부를 한 변의 길이가 3 인 작은 정사각형 9 개로 나누고
작은 정사각형 한 개안에 하나의 점을 놓는다고 할 때,
모두 10 개의 점을 놓아야 하므로 반드시 2 개의 점은 한 개의 작은 정사각형 안에 들어간다.
한 변의 길이가 3 인 작은 정사각형 안에 2 개의 점을 놓을 때
두 점 사이의 거리의 최댓값은 작은 정사각형의 대각선의 길이이므로 $3\sqrt{2}$ 이므로
$r = 3\sqrt{2}$

23. 상수 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}+1$에 대하여, 유리수 x, y가 $ax+by=2a+b$를 만족할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=3$

해설

주어진 식에 a, b를 각각 대입하면
$(\sqrt{3}-\sqrt{2})x+(2\sqrt{2}+1)y=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{2}+1$
양변을 $\sqrt{3}$ 항과 $\sqrt{2}$ 항으로 각각 정리하면
$x\sqrt{3}+(2y-x)\sqrt{2}+y=2\sqrt{3}+1$
$\therefore\ x=2,\ y=1$
$\therefore\ x+y=3$

24. x에 관한 이차식 $12x^2+20xy+ky^2$이 $(6x+ay)(2x+by)$로 인수분해될 때, k의 최댓값을 구하여라. (단, a, b는 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$12x^2+(2a+6b)xy+aby^2$
$a+3b=10$이 되는 경우는
$(1,3)$, $(4,2)$, $(7,1)$이므로
k의 최댓값은 $a=4, b=2$일 때이다.
$\therefore$ (k의 최대값) $=8$

25. $a-b=5$, $ab=-6$ 일 때, $a^3-b^3-a^2b+ab^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$$\begin{aligned} a^3-b^3-a^2b+ab^2 &= a^3-a^2b+ab^2-b^3 \\ &= a^2(a-b)+b^2(a-b) \\ &= \left(a^2+b^2\right)(a-b) \\ &= \left\{(a-b)^2+2ab\right\}(a-b) \\ &= \left\{5^2+2\times(-6)\right\}\times 5 \\ &= 65 \end{aligned}$$