1. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

2. $z = \dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2 - 4z - 1$ 의 값을 구하면?

① -1　② 2　③ -3　④ 4　⑤ -5

해설

$z = \dfrac{2}{1-i} = 1+i$

$\therefore\ 2z^2 - 4z - 1 \ = 2(1+i)^2 - 4(1+i) - 1$

$= 4i - 4 - 4i - 1$

$= \ -5$

해설

$z = 1+i, z-1 = i$

양변을 제곱하고 정리하면

$z^2 - 2z = -2$

$2z^2 - 4z - 1$

$= 2(z^2 - 2)z - 1$

$= -4 - 1 = -5$

3. 방정식 $|x| + |x-1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,
$-x-(x-1) = 2$이므로 $-2x+1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \le x < 1$일 때,
$x-(x-1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \le x$일 때,
$x + x - 1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

4. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+k-1=0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
$D=0$ 일 때 중근을 가지므로
$D=(k-4)^2-4(k-1)=k^2-12k+20=0$ 에서
$(k-2)(k-10)=0$
따라서, $k=2$, $k=10$ 이므로 k 의 값은 12 이다.

5. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k 에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

6. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

7. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2 \le x \le 2\ )$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

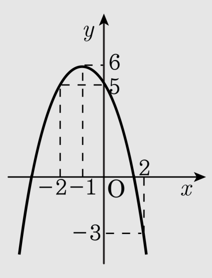
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$

점$(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2)=5, f(2)=-3$

따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며

최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.

$\therefore\ M+m=6-3=3$

8. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1, C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

9. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$ ② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$ ④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$

⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4}$ $\therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$

$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$

$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

10. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

11. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x) = x^3+2x^2-ax+b = (x^2+x-2)Q(x)$
$\quad = (x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2) = -8+8+2a+b = 0$
$f(1) = 1+2-a+b = 0$ 연립하면, $a=1, b=-2$
$\therefore\ a^2+b^2 = 5$

12. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d = 4$

13. 이차함수 $y = -x^2 + 4|x| - 3$ 이 최댓값을 갖도록 하는 실수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 0 개 ⑤ 무수히많다.

해설

(i) $x \geq 0$ 일 때,
$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$
(ii) $x < 0$ 일 때,
$y = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1$
이상에서 $x = -2,\ 2$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 구하는 실수 x 의 개수는 2 개이다.

14. 실수 $x,\ y$ 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

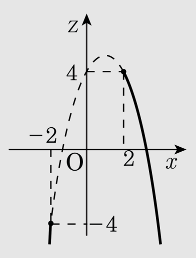
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2,\ x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

15. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$의 실근이 1뿐일 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a > -\frac{3}{4}$　　② $a > -\frac{3}{2}$　　③ $a > -1$

④ $a > 0$　　⑤ $a > 1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$의 근이 허근이거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.

(i) 허근을 가질 경우

$D = 1-4(a+1) < 0$,　$-3 < 4a$

$\therefore\ a > -\frac{3}{4}$

(ii) $x=1$을 중근으로 가질 경우

$D = 1-4(a+1) = 0$이고 $1+1+a+1=0$을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $a > -\frac{3}{4}$

16. 두 다항식 $f(x)=x^3-5, g(x)=x^3+3x+1$ 에 대하여 $f(x)=0$ 의 세 근을 α,β,γ 라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$ 의 값은?

① 350　② 351　③ 352　④ 353　⑤ 354

해설

$f(x)=0$ 의 세 근이 α,β,γ 라고 하면 $\alpha^3=5,\beta^3=5,\gamma^3=5$ 이다.
$g(\alpha)=\alpha^3+3\alpha+1=3\alpha+6,\ g(\beta)=\beta^3+3\beta+1=3\beta+6,$
$g(\gamma)=\gamma^3+3\gamma+1=3\gamma+6\ g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$
$=(3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6)=351\ (\because \alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=5)$

17. $\frac{2b+c}{3a}=\frac{3a+c}{2b}=\frac{3a+2b}{c}=k$ 일 때, 모든 k 의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

따로 분리하여 생각해 보면

$2b+c=3ak \quad \cdots$ ㉠

$3a+c=2bk \quad \cdots$ ㉡

$3a+2b=ck \quad \cdots$ ㉢

모두 더하면, $2(3a+2b+c)=k(3a+2b+c)$

ⅰ) $3a+2b+c\neq 0$ 인 경우, $k=2$

ⅱ) $3a+2b+c=0$ 인 경우

㉠에서 $3a=-3ak,\ k=-1$

$\therefore$ (k 의 합) $=2+(-1)=1$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+8z=k \end{cases}$ 을 만족하는 실수 x, y, z가 무수히 많이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots ㉠ \\ x+2y+3z=2 & \cdots ㉡ \\ 2x+5y+8z=k & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠$\times 2 -$㉡하면 $x-z=0,\ x=z$

$z=x$을 ㉠식에 대입하면

$x+y+x=1,\ y=-2x+1$

$z=x, y=-2x+1$ 을 ㉢식에 대입한 후 부정이 될 조건을 찾는다.

$2x+5(-2x+1)+8x=k$

$0x+5=k$, $0x=k-5$

$\therefore\ k=5$ ($\because$ 부정조건)

19. 대각선의 길이가 28 이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 a, b, c 라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176 이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152 이다.

20. $x+\frac{1}{x}=1$ 일때, $x^5+\frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=1-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{1}\right)=1-3=-2$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$

$(-1)\times(-2)=x^5+\frac{1}{x^5}+1$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=1$

해설

$x+\frac{1}{x}=1$ 의 양변에 x를 곱하면

$x^2-x+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0,$

$x^3+1=0,\ x^3=-1,\ \frac{1}{x^3}=-1$

$x^5+\frac{1}{x^5}=-x^2-\frac{1}{x^2}=-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$

$=-(-1)=1$

21. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지는 $2x-7$이고, $x^2-3x-10$으로 나누었을 때의 나머지는 11이다. 이 다항식 $f(x)$를 x^2-6x+5로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$　② $4x+3$　③ $x-1$
④ $4x-9$　⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$를 x^2-6x+5로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$f(x)=(x^2-6x+5)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \cdots ㉠$$

$f(x)$를 x^2-4x+3으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
$x^2-3x-10$으로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+2x-7$$
$$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+2x-7$$

$$f(x)=(x^2-3x-10)Q_2(x)+11$$
$$=(x-5)(x+2)Q_2(x)+11$$

이므로 $f(1)=-5,\ f(5)=11$이다.
㉠에서
$f(1)=a+b=-5$
$f(5)=5a+b=11$이므로 연립하여 풀면
$a=4,\ b=-9$
따라서 구하는 나머지는 $4x-9$이다.

22. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다.

$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$ 을 간단히 하면?

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $2+i$

④ $2-i$　　⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로

$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$　　$\therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

23. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$　② $\frac{49}{8}$　③ 49　④ 8　⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$를 x에 대해 정리하면
$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$
$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$
$4 - 200 + 32a = 0$
$\therefore\ a = \frac{49}{8}$

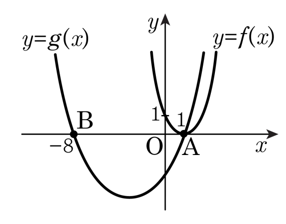
24. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 13

해설

α, β가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①
$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②
①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$
②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$
$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$
$=3\alpha\cdot 3\beta$
$=9\alpha\beta$
$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

25. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x축과 점 A(1, 0)에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 x축과 두 점 A(1, 0), B(−8, 0)에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 x^2 의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?



① $x = 1$
② $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x = 1$
③ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$
④ $x = -\frac{1}{5}$ 또는 $x = 1$
⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로
$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$
따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,
즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$
$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

26. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$
$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$
$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$
$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$
$\therefore\ -5\leq y\leq 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

27. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6 ② 4 ③ 0 ④ -1 ⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.
$x=1$을 대입하면 $R=m-5$
$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①
$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로
$Q(-1)=-5$
①식에 $x=-1$을 대입하면
$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$
$-2m=12$
$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & m & -4 \\ & & 1 & -1 & m-1 \\ \hline -1 & 1 & -1 & m-1 & \boxed{m-5} \\ & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \boxed{m+1} & \end{array}$$

$m+1=-5\ \therefore\ m=-6$

28. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$　　② $b+c$　　③ $c+a$
④ $b-a$　　⑤ $-b-c$

해설
전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$
$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$
$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a+c)$
∴ ④ $b-a$는 인수가 아니다

29. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리　② 11자리　③ 12자리
④ 13자리　⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20}-4 &= (10^{10})^2-2^2 \\ &= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right) \\ 10^{30}-8 &= (10^{10})^3-2^3 \\ &= \left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)\end{aligned}$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

30. 방정식 $x^{11}=1$ 의 10개의 허근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{10}$ 이라 할 때, $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\cdots(\alpha_{10}+1)$ 의 값은?

① 1　　② -1　　③ i　　④ $-i$　　⑤ 10

해설

$x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$ 이므로 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{10}$ 은 방정식 $x^{10}+x^9+\cdots+x+1=0$ 의 10개의 근이다.
$\therefore\ x^{10}+x^9+\cdots+x+1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{10})$ 위 식은 항등식이므로
$x=-1$ 을 대입하면 $1-1+1-\cdots-1+1=(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2)\cdots(-1-\alpha_{10})$
$\therefore (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_{10}+1)=1$

31. 사차방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 두 실근의 합을 구하면?

① -5　② -6　③ 0　④ 5　⑤ 6

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2 으로 나누면
$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x}^{2}=0,$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$
$x+\frac{1}{x}=t$라 놓으면
$t^2+5t-6=0,\ (t+6)(t-1)=0$
$\therefore\ t=1,\ -6$
즉, $x+\frac{1}{x}=1,\ x+\frac{1}{x}=-6$
$\therefore\ x^2-x+1=0\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+6x+1=0\cdots\cdots$ ㉡
㉠식은 허근을 가지므로 조건에 맞지 않고
㉡식에서 두 실근의 합은
근과 계수와의 관계에서
$\therefore\ \alpha+\beta=-6$

32. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=3xy \\ y+z=5yz \\ z+x=4zx \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z 에 대하여

$\dfrac{xy+2yz+3zx}{xyz}$ 의 값을 구하면?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

주어진 식을 각각 $xy,\ yz,\ zx$ 로 나누면 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3 \cdots\cdots ㉠ \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=5 \cdots\cdots ㉡ \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=4 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

$(㉠+㉡+㉢)\times\dfrac{1}{2}$ 을 하면

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6\cdots ㉣$

㉣ − ㉠, ㉣ − ㉡, ㉣ − ㉢ 에서

$\dfrac{1}{z}=3,\ \dfrac{1}{x}=1,\ \dfrac{1}{y}=2$

따라서 $\dfrac{xy+2yz+3zx}{xyz}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=3+2+6=11$

33. 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy = a$, $xz = b$, $yz = c$ 라고 할 때, $x^2+y^2+z^2$ 은?

① $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$
② $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$
③ $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$
④ $\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$
⑤ $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

해설

$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2$, $x^2 = \dfrac{ab}{c}$

마찬가지로, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$

$$\therefore \; x^2+y^2+z^2 = \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a} = \frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$$