

1. x 에 관한 이차방정식 $ax^2 + px - ap - 2q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 2$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x = 2$ 가 근이므로 $4a + 2p - ap - 2q = 0$ 이고 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$(4 - p)a + 2(p - q) = 0$ 에 의하여 $p = 4$, $q = 4$ 이다.

$\therefore p + q = 8$

2. 두 이차방정식 $x^2 + x + a = 0$ 과 $x^2 - 4x + b = 0$ 의 공통인 해가 2 일 때, $ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $x = \frac{2 \pm \sqrt{34}}{6}$

해설

각 식에 $x = 2$ 를 대입하면

$a = -6, b = 4$

$\therefore -6x^2 + 4x + 5 = 0$ 에서

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{34}}{6}$$

3. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때, $(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

$x = p$ 를 대입하면 $2p^2 - 2p - 1 = 0$, $2p^2 - 2p = 1$ 이므로

$p^2 - p = \frac{1}{2}$ 이다.

$x = q$ 를 대입하면 $2q^2 - 2q - 1 = 0$, $2q^2 - 2q = 1$ 이므로

$q^2 - q = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1) &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{4} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

4. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 m 일 때, $\frac{m^2}{1+2m} - \frac{6m}{1-m^2}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에 $x = m$ 을 대입하면,

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

$$1 + 2m = m^2, 1 - m^2 = -2m$$

$$\therefore \frac{m^2}{1+2m} - \frac{6m}{1-m^2} = \frac{m^2}{m^2} - \frac{6m}{-2m} = 1 + 3 = 4$$

5. 이차방정식 $5(2a-3)x^2 - 5(4a^2-9)x - 4(2a+3) = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, a 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$5(2a-3)x^2 - 5(4a^2-9)x - 4(2a+3) = 0$ 의 한 근이 1 이므로
 $5(2a-3) \times 1 - 5(4a^2-9) \times 1 - 4(2a+3) = 0$,
 $10a - 15 - 20a^2 + 45 - 8a - 12 = 0$,
 $-20a^2 + 2a + 18 = 0$, $20a^2 - 2a - 18 = 0$, $(20a+18)(a-1) = 0$
,
 a 는 정수이므로 $a = 1$,
 $-5x^2 + 25x - 20 = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $(x-1)(x-4) = 0$,
 $x = 1$ 또는 $x = 4$,
따라서 다른 한 근은 4 이다.

6. 이차방정식 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 의 한 근이 2 일 때,
다른 한 근을 구하여라. (단, $a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 의 한 근이 2 이므로
 $(a-1) \times 4 - (a^2+1) \times 2 + 2(a+1) = 0$,
 $4a - 4 - 2a^2 - 2 + 2a + 2 = 0$,
 $a^2 - 3a + 2 = 0$, $(a-2)(a-1) = 0$,
 $a \neq 1$ 이므로 $a = 2$,
 $x^2 - 5x + 6 = 0$, $(x-2)(x-3) = 0$,
 $x = 2$ 또는 $x = 3$,
따라서 다른 한 근은 3 이다.

7. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 p 일 때, $\frac{2p^3}{3p^2 - p - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 1 &= 0 \text{ 의 한 근이 } p \text{ 이므로} \\p^2 - 2p - 1 &= 0 \\ \therefore p^2 &= 2p + 1 \\p^3 &= 2p^2 + p = 2(2p + 1) + p = 5p + 2 \\ \therefore \frac{2p^3}{3p^2 - p - 1} &= \frac{2(5p + 2)}{3(2p + 1) - p - 1} \\ &= \frac{10p + 4}{5p + 2} \\ &= 2\end{aligned}$$

8. 이차방정식 $4x^2 + px - 5p = 0$ 을 $(2x - A)^2 = B$ 의 꼴로 변형하였더니 $B = 0$ 이 되었다. 이 때, A 의 값을 구하여라. ($p \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$4x^2 + px - 5p = 0$ 을 변형하면

$$\left(2x + \frac{p}{4}\right)^2 = 5p + \frac{p^2}{16}$$

즉, $B = 0$ 이므로

$$5p + \frac{p^2}{16} = 0$$

$$80p + p^2 = 0$$

$$p(p + 80) = 0$$

$p \neq 0$ 이므로

$$\therefore p = -80$$

따라서 $A = -\frac{p}{4} = 20$ 이다.

9. 이차방정식 $(4x-1)^2 = K$ 가 중근을 갖고 그 근을 a 라고 할 때, $a+K$ 의 값을 구하여라. (단, K 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$$K = 0, a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a + K = \frac{1}{4}$$

10. 이차방정식 $x^2 + 4ax + 6a + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 양수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^2 + 4ax + 6a + 4 = 0$$

$$x^2 + 4ax = -6a - 4$$

$$(x + 2a)^2 = -6a - 4 + 4a^2$$

따라서 $-a - 4 + a^2 = 0$ 이므로

$$(4a + 2)(a - 2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 2 \text{ 이다.}$$

11. 이차방정식 $2x^2 - 12x + k - 3 = 0$ 가 중근을 가질 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$$2x^2 - 12x = -k + 3$$

$$2(x^2 - 6x) = -k + 3$$

$$2(x - 3)^2 = -k + 3 + 18$$

$$-k + 3 + 18 = 0$$

$$\therefore k = 21$$

12. 이차방정식 $25x^2 + ax + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $2x^2 + 3x - a = 0$ 을 풀어라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{5}{2}$ 또는 2.5

▷ 정답 : $x = -4$

해설

$$\begin{aligned} 25x^2 + ax + 4 &= 0 \\ \left(\frac{a}{25 \times 2}\right)^2 &= \frac{4}{25}, \frac{a}{50} = \frac{2}{5} \\ \therefore a &= 20 \\ 2x^2 + 3x - 20 &= 0 \\ (2x - 5)(x + 4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{5}{2} \text{ 또는 } x = -4 \end{aligned}$$

13. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가지므로

$3 - k = 9$, $k = -6$ 이다.

$-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 에 $k = -6$ 을 대입하면

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$2(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 곱은 $1 \times 2 = 2$ 이다.

14. 이차방정식 $4x^2 - 12x + 1 - k = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $-\frac{1}{4}kx^2 - 3x - 2 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$4x^2 - 12x + 1 - k = 0$ 이 중근을 가지므로

$1 - k = 9$, $k = -8$ 이다.

$-\frac{1}{4}kx^2 - 3x - 2 = 0$ 에 $k = -8$ 을 대입하면

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 곱은 $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$ 이다.

15. 이차방정식 $(3x-2)^2 = 16$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -\frac{2}{3}$

▷ 정답 : $x = 2$

해설

$$(3x-2)^2 = 16$$

$$3x-2 = \pm 4$$

$$3x = 2 \pm 4$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

16. 이차방정식 $3(x+2)^2 = 6$ 의 두 근의 합을 구하면?

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 &= 6 \\ (x+2)^2 &= 2 \\ x+2 &= \pm\sqrt{2} \\ \therefore x &= -2 \pm \sqrt{2} \\ \therefore (-2 + \sqrt{2}) + (-2 - \sqrt{2}) &= -4 \end{aligned}$$

17. 이차방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 해를 완전제곱식을 이용하여 풀려고 한다. $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 고쳐서 이차방정식의 해를 구하면?

① $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ ② $x = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{4}$ ③ $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{3}$
④ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3}$ ⑤ $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

해설

양변을 3 으로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{2}{3}$$

양변에 $\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$ 을 더하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = -\frac{2}{3} + \frac{16}{9}$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$x - \frac{4}{3} = \pm \sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

18. 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 해를 완전제곱식을 이용하여 풀었을 때, 유리수 해를 가지는 a 의 값을 모두 구하여라.(단, $a \geq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 4x = -a$ 이고 완전제곱식이 되도록 양변에 4 를 더하면
 $x^2 - 4x + 4 = -a + 4, (x - 2)^2 = -a + 4, x - 2 = \pm \sqrt{4 - a}, x = 2 \pm \sqrt{4 - a}$
유리수 해를 가져야 하므로 $4 - a$ 가 4, 1, 0 이어야 한다.
따라서 $4 - a = 0$ 일 때, $a = 4$ 이고, $4 - a = 1$ 일 때, $a = 3$ 이다.
또한, $4 - a = 4$ 일 때, $a = 0$ 이다.

19. 다음 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 10 = 0$ 의 해가 $x = 7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$$x^2 - 2ax = -a^2 + 10$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -a^2 + 10 + a^2 = 10$$

$$(x - a)^2 = 10 \text{ 이므로}$$

$$x - a = \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{10}$$

따라서 $a = 7$, $b = 10$ 이므로 $ab = 70$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2 + 4ax + b = 0$ 의 근이 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 7$

해설

$x^2 + 4ax + b = 0$ 에서

$$x^2 + 4ax = -b$$

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = -b + 4a^2$$

$$(x + 2a)^2 = -b + 4a^2$$

$$x + 2a = \pm \sqrt{4a^2 - b}$$

$$\therefore x = -2a \pm \sqrt{4a^2 - b} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 $a = -1$, a 값을 대입하면

$$\sqrt{4 - b} = \sqrt{12}$$

$$\therefore b = -8$$

따라서 $a - b = 7$ 이다.

21. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 2$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

22. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?
- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
 - ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
 - ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
 - ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
 - ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$
$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개
 $k = 3$: 근이 1개
 $3 < k$: 근이 2개