1. x 에 관한 이차방정식 $ax^2 + px - ap - 2q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 2$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$x = 2$ 가 근이므로 $4a + 2p - ap - 2q = 0$ 이고 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$(4 - p)a + 2(p - q) = 0$ 에 의하여 $p = 4,\ q = 4$ 이다.

$\therefore p + q = 8$

2. 두 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 과 $x^2-4x+b=0$ 의 공통인 해가 2 일 때, $ax^2+bx+5=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=\dfrac{2\pm\sqrt{34}}{6}$

해설

각 식에 $x=2$ 를 대입하면

$a=-6,\ b=4$

$\therefore -6x^2+4x+5=0$ 에서

$x=\dfrac{2\pm\sqrt{34}}{6}$

3. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때, $(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

$x = p$ 를 대입하면 $2p^2 - 2p - 1 = 0$, $2p^2 - 2p = 1$ 이므로

$p^2 - p = \frac{1}{2}$ 이다.

$x = q$ 를 대입하면 $2q^2 - 2q - 1 = 0$, $2q^2 - 2q = 1$ 이므로

$q^2 - q = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$$(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1) = \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

4. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 m 일 때, $\dfrac{m^2}{1+2m} - \dfrac{6m}{1-m^2}$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에 $x = m$ 을 대입하면,

$m^2 - 2m - 1 = 0$

$1 + 2m = m^2$, $1 - m^2 = -2m$

$\therefore \dfrac{m^2}{1+2m} - \dfrac{6m}{1-m^2} = \dfrac{m^2}{m^2} - \dfrac{6m}{-2m} = 1 + 3 = 4$

5. 이차방정식 $5(2a-3)x^2-5(4a^2-9)x-4(2a+3)=0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, a 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$5(2a-3)x^2-5(4a^2-9)x-4(2a+3)=0$ 의 한 근이 1 이므로
$5(2a-3)\times 1-5(4a^2-9)\times 1-4(2a+3)=0$,
$10a-15-20a^2+45-8a-12=0$,
$-20a^2+2a+18=0$, $20a^2-2a-18=0$, $(20a+18)(a-1)=0$
,
a 는 정수이므로 $a=1$,
$-5x^2+25x-20=0$, $x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$,
$x=1$ 또는 $x=4$,
따라서 다른 한 근은 4 이다.

6. 이차방정식 $(a-1)x^2-(a^2+1)x+2(a+1)=0$ 의 한 근이 2 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, $a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a-1)x^2-(a^2+1)x+2(a+1)=0$ 의 한 근이 2 이므로

$(a-1)\times 4-(a^2+1)\times 2+2(a+1)=0$,

$4a-4-2a^2-2+2a+2=0$,

$a^2-3a+2=0$, $(a-2)(a-1)=0$,

$a \neq 1$ 이므로 $a=2$,

$x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$,

$x=2$ 또는 $x=3$,

따라서 다른 한 근은 3 이다.

7. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 p 일 때, $\dfrac{2p^3}{3p^2 - p - 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 한 근이 p 이므로

$p^2 - 2p - 1 = 0$

$\therefore\ p^2 = 2p + 1$

$p^3 = 2p^2 + p = 2(2p + 1) + p = 5p + 2$

$$\therefore\ \frac{2p^3}{3p^2 - p - 1} = \frac{2(5p + 2)}{3(2p + 1) - p - 1}$$

$$= \frac{10p + 4}{5p + 2}$$

$$= 2$$

8. 이차방정식 $4x^2+px-5p=0$ 을 $(2x-A)^2=B$ 의 꼴로 변형하였더니 $B=0$ 이 되었다. 이 때, A 의 값을 구하여라. $(p \neq 0)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$4x^2+px-5p=0$ 을 변형하면

$\left(2x+\frac{p}{4}\right)^2=5p+\frac{p^2}{16}$

즉, $B=0$ 이므로

$5p+\frac{p^2}{16}=0$

$80p+p^2=0$

$p(p+80)=0$

$p \neq 0$ 이므로

$\therefore\ p=-80$

따라서 $A=-\frac{p}{4}=20$ 이다.

9. 이차방정식 $(4x-1)^2 = K$가 중근을 갖고 그 근을 a 라고 할 때, $a+K$의 값을 구하여라. (단, K 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{4}$

해설

$K = 0,\ a = \frac{1}{4}$

$\therefore\ a + K = \frac{1}{4}$

10. 이차방정식 $x^2+4ax+6a+4=0$ 이 중근을 가질 때, 양수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2+4ax+6a+4=0$

$x^2+4ax=-6a-4$

$(x+2a)^2=-6a-4+4a^2$

따라서 $-a-4+a^2=0$ 이므로

$(4a+2)(a-2)=0$

$a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$ 이다.

11. 이차방정식 $2x^2 - 12x + k - 3 = 0$ 가 중근을 가질 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$2x^2 - 12x = -k + 3$

$2(x^2 - 6x) = -k + 3$

$2(x-3)^2 = -k + 3 + 18$

$-k + 3 + 18 = 0$

$\therefore\ k = 21$

12. 이차방정식 $25x^2 + ax + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $2x^2 + 3x - a = 0$ 을 풀어라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = \frac{5}{2}$ 또는 2.5

▷ 정답 : $x = -4$

해설

$25x^2 + ax + 4 = 0$

$\left(\frac{a}{25 \times 2}\right)^2 = \frac{4}{25}$, $\frac{a}{50} = \frac{2}{5}$

$\therefore\ a = 20$

$2x^2 + 3x - 20 = 0$

$(2x - 5)(x + 4) = 0$

$\therefore\ x = \frac{5}{2}$ 또는 $x = -4$

13. 이차방정식 $x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 - 6x + 3 - k = 0$ 이 중근을 가지므로

$3 - k = 9,\ k = -6$ 이다.

$-\frac{1}{3}kx^2 - 6x + 4 = 0$ 에 $k = -6$ 을 대입하면

$2x^2 - 6x + 4 = 0$

$2(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 곱은 $1 \times 2 = 2$ 이다.

14. 이차방정식 $4x^2 - 12x + 1 - k = 0$ 이 중근을 가질 때, 이차방정식 $-\frac{1}{4}kx^2 - 3x - 2 = 0$ 의 두 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$4x^2 - 12x + 1 - k = 0$ 이 중근을 가지므로

$1 - k = 9,\ k = -8$ 이다.

$-\frac{1}{4}kx^2 - 3x - 2 = 0$ 에 $k = -8$ 을 대입하면

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$(2x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 2$

따라서 두 근의 곱은 $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$ 이다.

15. 이차방정식 $(3x-2)^2=16$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=-\frac{2}{3}$

▷ 정답 : $x=2$

해설

$(3x-2)^2=16$

$3x-2=\pm 4$

$3x=2\pm 4$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

16. 이차방정식 $3(x+2)^2 = 6$ 의 두 근의 합을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$3(x+2)^2 = 6$

$(x+2)^2 = 2$

$x+2 = \pm\sqrt{2}$

$\therefore\ x = -2 \pm \sqrt{2}$

$\therefore\ (-2+\sqrt{2}) + (-2-\sqrt{2}) = -4$

17. 이차방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 해를 완전제곱식을 이용하여 풀려고 한다. $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 고쳐서 이차방정식의 해를 구하면?

① $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ ② $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{10}}{4}$ ③ $x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{10}}{3}$

④ $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{10}}{3}$ ⑤ $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

해설

양변을 3 으로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{2}{3}$$

양변에 $\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$ 을 더하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = -\frac{2}{3} + \frac{16}{9}$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$x - \frac{4}{3} = \pm\sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

18. 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 해를 완전제곱식을 이용하여 풀었을 때, 유리수 해를 가지는 a 의 값을 모두 구하여라.(단, $a \geq 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 4x = -a$ 이고 완전제곱식이 되도록 양변에 4 를 더하면
$x^2 - 4x + 4 = -a + 4, (x-2)^2 = -a + 4, x - 2 = \pm\sqrt{4-a}, x = 2 \pm \sqrt{4-a}$
유리수 해를 가져야 하므로 $4 - a$ 가 $4, 1, 0$ 이어야 한다.
따라서 $4 - a = 0$ 일 때, $a = 4$ 이고, $4 - a = 1$ 일 때, $a = 3$ 이다.
또한, $4 - a = 4$ 일 때, $a = 0$ 이다.

19. 다음 이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 - 10 = 0$ 의 해가 $x = 7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 70

해설

$x^2 - 2ax = -a^2 + 10$

$x^2 - 2ax + a^2 = -a^2 + 10 + a^2 = 10$

$(x - a)^2 = 10$ 이므로

$x - a = \pm\sqrt{10}$

$\therefore x = a \pm \sqrt{10}$

따라서 $a = 7,\ b = 10$ 이므로 $ab = 70$ 이다.

20. 이차방정식 $x^2 + 4ax + b = 0$ 의 근이 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 7$

해설

$x^2 + 4ax + b = 0$ 에서

$x^2 + 4ax = -b$

$x^2 + 4ax + 4a^2 = -b + 4a^2$

$(x + 2a)^2 = -b + 4a^2$

$x + 2a = \pm\sqrt{4a^2 - b}$

$\therefore x = -2a \pm \sqrt{4a^2 - b} = 2 \pm 2\sqrt{3}$

따라서 $a = -1$, a 값을 대입하면

$\sqrt{4 - b} = \sqrt{12}$

$\therefore b = -8$

따라서 $a - b = 7$ 이다.

21. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $k = -6$ 이면 근이 2 개이다.

② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k = 2$ 이면 근이 1 개이다.

⑤ $k = 4$ 이면 근이 없다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0 개

$k = 3$: 근이 1 개

$3 < k$: 근이 2 개

22. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$의 근에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $k = -6$이면 근이 2개이다.

② $k = -1$이면 정수인 근을 갖는다.

③ $k = 0$이면 무리수인 근을 갖는다.

④ $k = 1$이면 근이 1개이다.

⑤ $k = 3$이면 중근을 갖는다.

해설

$(x-1)^2 = 3-k,\ x-1 = \pm\sqrt{3-k}$

$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{3-k}$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개