1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때,

$(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

4. 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3$을 일차식 $x - 1$로 나누어 떨어지도록 a의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$f(1) = 1 + a + 3 = 0$, $a = -4$

5. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

6. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

7. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, \quad -\sqrt{2}, \quad 2i, \quad -2i,$ $3i, \quad -3i, \quad 1-i, \quad 1+i$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore \ 2i, \ -2i, \ 3i, \ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

8. a, b가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 a, b의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1$, $b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

9. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

10. 부등식 $|x-3| \geq 2$의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

③ $-1 \leq x \leq 5$

④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x-3| \geq 2$에서 $x-3 \geq 2$ 또는 $-(x-3) \geq 2$ $\therefore$ $x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

11. 다항식 $f(x)$를 $x-2,\ x-3$ 으로 나눌 때의 나머지가 각각 $3, 7$이라고 할 때, $f(x)$를 $(x-2)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+3$　　② $3x-4$　　③ $4x-5$

④ $5x+6$　　⑤ $6x-7$

해설

$f(x)=(x-2)\,Q_1(x)+3,\ f(2)=3$
$f(x)=(x-3)\,Q_2(x)+7,\ f(3)=7$
$f(x)=(x-2)(x-3)\,Q_3(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3, f(3)=3a+b=7$ 이다.
연립하면 $a=4,\ b=-5$
$\therefore$ 나머지는 $4x-5$

12. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 로 인수분해될 때, $|ab-cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

(준식) $=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times3-(-2)\times3|=12$

13. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

14. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

15. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i$, $3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i$, $2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right| = \left|\frac{b}{a} \times \frac{c}{a}\right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

16. x의 값의 범위가 $2 \le x \le 4$ 인 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x-1)^2 + 3$ 이므로
$2 \le x \le 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값1,
$x = 4$ 일 때 최솟값 -15를 가진다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-15) = -14$

17. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

18. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 $1\ \mathrm{cm}$줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 $2\ \mathrm{cm}$, $3\ \mathrm{cm}$씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 $x\ \mathrm{cm}$라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\mathrm{cm})$

19. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 최솟값을 구하면?

① -8　② -6　③ -4　④ -2　⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x-y)(x+2y)=0 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$

1) $y=2x$일 때

$x^2+4x^2=5x^2=20\ \ \therefore\ x=\pm2,\ y=\pm4$

2) $x=-2y$일 때

$4y^2+y^2=5y^2=20$

$\therefore\ y=\pm2,\ x=\mp4$ (복호동순)

$\therefore (x,\ y)=(2,\ 4),(-2,\ -4),(-4,\ 2),(4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha+\beta=\ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha+\beta$의 최솟값은 -6

20. 부등식 $|x-k| \leq 3$을 만족하는 x의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x-k| \leq 3$에서 $-3 \leq x-k \leq 3$,
$-3+k \leq x \leq 3+k$
따라서 x의 최댓값은 $3+k$,
최솟값은 $-3+k$이므로
$(-3+k)(3+k)=9$
$k^2-9=9$
$k^2=18 \quad \therefore k=\pm 3\sqrt{2}$
k는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

21. 이차부등식 $ax^2+5x+b>0$ 의 해가 $\frac{1}{3}<x<c\frac{1}{2}$ 일 때 이차부등식 $bx^2+5x+a\geq 0$ 의 해를 구한 것은 ?

① $-6\leq x\leq -1$　② $-3\leq x\leq -2$　③ $2\leq x\leq 3$

④ $1\leq x\leq 6$　⑤ $1\leq x\leq 3$

해설

1. 이차부등식 $ax^2+5x+b>0\cdots$①
이라 놓으면 ① 의 해가
$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$ 이므로
$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$
$x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x+\frac{1}{6}<0$
$x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0,\ -6x^2+5x-1>0$
$\therefore\ ax^2+5x+b=-6x^2+5x-1$
$\therefore\ a=-6,\ b=-1\cdots$②
2. $bx^2+5x+a\geq 0$ 의 부등식에 ② 를 대입하면
$-x^2+5x-6\geq 0,\ x^2-5x+6\leq 0,$
$(x-2)(x-3)\leq 0$
$\therefore\ 2\leq x\leq 3$

22. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ x^2 \ge 2 - x \end{cases}$ 의 해와 부등식 $ax^2 + 2bx - (a+2b) \ge 0$ 의 해가 일치할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \cdots (가) \\ x^2 \ge 2 - x \cdots (나) \end{cases}$

(가) 에서 $x(x-3) \le 0 \quad \therefore 0 \le x \le 3$
(나) 에서
$x^2 + x - 2 \ge 0, \quad (x+2)(x-1) \ge 0$
$\therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 1$
따라서 (가) 와 (나) 의 공통 범위를 구하면
$1 \le x \le 3$
해가 $1 \le x \le 3$ 이고 이차항의 계수가
$a(a<0)$ 인 부등식은

$a(x-1)(x-3) \ge 0$
$ax^2 - 4ax + 3a \ge 0$
$\therefore -4a = 2b, \quad 3a = -(a+2b)$
$-4a = 2b$에서 $\quad b = -2a$
$\frac{b}{a} = \frac{-2a}{a} = -2$

23. 이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \le k < 7$　② $-1 \le k \le 2$　③ $-5 \le k \le -2$
④ $-7 < k \le -1$　⑤ $-7 < k \le -3$

해설

이차방정식 $x^2+2kx+6-k=0$ 의
두 근이 모두 1보다 크므로
$f(x)=x^2+2kx+6-k$ 로 놓으면
(i) $D \ge 0$ 이므로
$k^2+k-6 \ge 0$
$(k+3)(k-2) \ge 0$
$\therefore k \le -3, k \ge 2$
(ii) $x^2+2kx+6-k=(x+k)^2+6-k-k^2$ 에서
$-k > 1$
$\therefore k < -1$
(iii) $f(1) > 0$ 이므로
$1+2k+6-k > 0$
$\therefore k > -7$
따라서 (i), (ii), (iii) 에서
$\therefore -7 < k \le -3$

24. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원 ② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선 ④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

25. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는
실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$
$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$
㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

26. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$　　② $\frac{2}{\beta}$　　③ β　　④ 2β　　⑤ β^2

해설

$\beta^2-\beta+1=0$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2=\frac{1}{\alpha^2}$

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\beta+\beta^2=2\beta$

$(\because\ \beta^2+1=\beta\ )$

해설

(별해1)

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}$ $(\because\ \alpha^2-\alpha+1=0)$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$

$\therefore\ \frac{2}{\alpha}=2\beta$

(별해2)

$x^2-x+1=0$의 근은 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=1-\sqrt{3}i=2\beta$

27. $x+y=3,\ x\geq 0,\ y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x\geq 0,\ y\geq 0$ 이므로

$y=-x+3\geq 0 \ \rightarrow \ -x\geq -3 \ \rightarrow \ x\leq 3 \therefore \ 0\leq x\leq 3 \ (\because \ x\geq 0)$

또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$

$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 $18 \therefore M-m=12$

28. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2+\alpha+3k=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

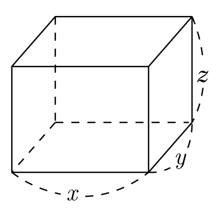
$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0 \quad \therefore\ k=-4$

$\therefore\ \alpha-k=7$

29. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53　　② 56　　③ 59

④ 62　　⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12} = 8 \Rightarrow x+y+z = 24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12} - 8^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 204$$

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2} = 186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6} = \frac{xy+yz+zx}{3} = \frac{186}{3} = 62$$

30. 연립방정식 $\begin{cases} ab+bc=65 \\ ac+bc=17 \end{cases}$ 을 만족시키는 양의 정수쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수를 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$ac+bc=17$ 에서 $c(a+b)=17$
그런데 $a,\ b$ 는 양의 정수이므로 $a+b \geq 2$
$\therefore\ c=1,\ a+b=17$
위의 식들을 $ab+bc=65$ 에 대입하면
$a^2-16a+48=0$
$\therefore\ a=4$ 또는 $a=12$
따라서, $a=4$ 일 때 $b=13,\ c=1$
$a=12$ 일 때 $b=5,\ c=1$

31. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3,\ a^2+b^2+c^2=9,\ a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　② 70　③ 71　④ 72　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

32. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$

$$\begin{aligned} \therefore\ f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3 \end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t = -2$ 일 때, 최솟값 -2 $(\because t \geq -2)$

33. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$의 한 허근을 w라 할 때, $w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

짝수차 상반방정식이므로
양변을 x^2으로 나누면
$x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$
$\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}-3=0$
$x+\frac{1}{x}=z$로 놓으면
$z^2+2z-3=(z+3)(z-1)=0$
$\therefore\ z=-3$ 또는 $z=1$
(ⅰ) $z=-3$일 때,
$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$
$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$: 실근
(ⅱ) $z=1$일 때,
$x+\frac{1}{x}=1$에서
$x^2-x+1=0$
$x^2-x+1=0$의 해는 허수이므로
w는 $x^2-x+1=0$의 해이다.
$\therefore\ w^2-w+1=0,\ w^3=-1$
$\therefore\ w^{2006}+\left(\frac{1}{w}\right)^{2006}$
$=w^2\cdot w^{2004}+\frac{1}{w^2\cdot w^{2004}}$
$=w^2+\left(\frac{1}{w}\right)^2=w^2-w=-1$