1. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 $a,\ b,\ c$ 의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = -1,\ c = 2$
② $a = -1,\ b = 1,\ c = -2$
③ $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$
④ $a = -1,\ b = -1,\ c = -2$
⑤ $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.
$x = 0$ 을 대입 $-2 = -2a \quad \therefore\ a = 1$
$x = 1$ 을 대입 $-3 = 3b \quad \therefore\ b = -1$
$x = -2$ 를 대입 $12 = 6c \quad \therefore\ c = 2$

2. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

3. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면

$x^3-6x^2+11x-30=0$

$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7$ ……㉠

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11$ ……㉡

$x+2y+3z=7$ ……㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0$ ……㉣

㉡ × 3 − ㉣ × 2를 하면 $11x=33$

∴ $x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1,\ z=2$

5. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y + 1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y + 2)(y - 1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

6. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2) \div (\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}) = x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$\boxed{}x^2+\boxed{}x+\boxed{}=A$ 라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2) \div A = x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$ 이므로

$\boxed{}$ 안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

7. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

8. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

9. 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x+2y+1$ ② $x+y-3$ ③ $2x+3y+2$
④ $x+y-2$ ⑤ $2x+3y-1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)$
$=(x+y-2)(x+2y+1)$

10. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore\ a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore\ b = 4 \quad \therefore\ ab = 28$

11. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로

$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

12. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$
$y = x + 1 \qquad \cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

13. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \le x \le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.
$-1 \le x \le 2$ 에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값
-1 을 갖는다.

14. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

15. 삼차방정식 $x^3-6x^2-7x-5=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ 의 값은?

① -15 ② 16 ③ -16 ④ 17 ⑤ -17

해설

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$
근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-7,\ \alpha\beta\gamma=5$
$\therefore\quad (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

해설

$f(x)=x^3-6x^2-7x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이므로
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=1-6-7-5=-17$

16. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50} + \omega^{51} + \omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^3 - 1 = 0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1) = 0$에서
$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2 + \omega + 1)$이고
$\omega^2 + \omega + 1 = 0$이므로 답은 0이다.

17. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수$=2$
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,
계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
$x+x^2+x^3=Y$라 하면,
$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
$3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ)에서 $2+1+3=6$

18. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

19. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, R ③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

20. n이 짝수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$의 값은?

① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n+1}$$
$$=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\left\{\left(\frac{1-\pi}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{2n}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=(\pi^2)^{2n}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\{(-\pi)^2\}^{2n}-\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}+\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

21. $x^2+5xy+ay^2+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2+5xy+ay^2+y-2$를 x에 대해 정리하면
$x^2+5yx+ay^2+y-2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D=(25-4a)y^2-4y+8$
$\frac{D'}{4}=4-8(25-4a)=0,$
$4-200+32a=0$
$\therefore\ a=\frac{49}{8}$

22. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$　　② $\frac{2}{\beta}$　　③ β　　④ 2β　　⑤ β^2

해설

$\beta^2 - \beta + 1 = 0$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2 = \frac{1}{\alpha^2}$

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = 1 + \beta + \beta^2 = 2\beta$

$(\because \ \beta^2 + 1 = \beta \ )$

해설

(별해1)

$1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \ (\because \ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0)$

$\alpha\beta = 1$에서 $\beta = \frac{1}{\alpha}$

$\therefore \ \frac{2}{\alpha} = 2\beta$

(별해2)

$x^2 - x + 1 = 0$의 근은 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\alpha = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \ \beta = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}} = 1 - \sqrt{3}i = 2\beta$

23. p와 q가 소수이고, $x^2-px+q=0$이 서로 다른 두 개의 양의 정수근을 가질 때, 다음 중 옳은 문장은 몇 개인가?

(가) 두 근의 차는 홀수이다.
(나) 적어도 한 근은 소수이다.
(다) p^2-q는 소수이다.
(라) $p+q$는 소수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 0개

해설

$x^2-px+q=0$의 서로 다른 양의 정수근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=p$ ⋯⋯㉠
$\alpha\beta=q$ ⋯⋯㉡이다.
그런데, q가 소수이므로 ㉡에서 두 근은 1과 q이다.
$\therefore$ ㉠에서 $1+q=p$ $\therefore$ $p-q=1$
그런데 p도 소수이므로 두 소수의 차가 1인 경우는 $p=3, q=2$일 때 뿐이다.
$x^2-3x+2=0$에서 $(x-1)(x-2)=0$
$\therefore$ $x=1, 2$
따라서, 주어진 문장은 모두 옳다.

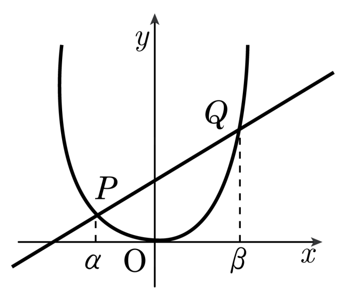
24. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

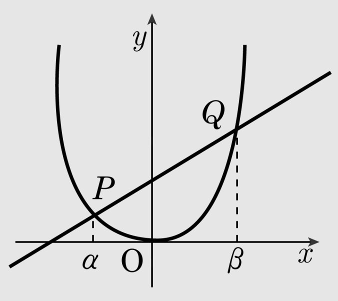
$x^2 = X$로 놓으면
$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0 \cdots\cdots$ ①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
①의 두 근을 α, β라 할 때,
$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$, $\alpha+\beta = -(m+2) > 0$, $\alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
$-5 < m < -4$

25. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x+3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는

$x^2 = m(x+3),\ x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로

두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = -3m$

$\overline{\mathrm{OP}}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{\mathrm{OQ}}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$

두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1, -3m = -1$

$\therefore m = \frac{1}{3}$