1. 다음은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(c \neq 0)$ 의 두 근이 α, β일 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차항의 계수가
> 1인 이차방정식은 x^2+[(가)]$x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$
> 근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$
> 이므로 구하는 방정식은 x^2+[(나)]$x+\frac{a}{c}=0$
> 이것을 정리하면 [(다)]$=0$이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
② $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
③ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $-\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a
④ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2+bx+a
⑤ $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$, $\frac{b}{c}$, cx^2-bx+a

해설

(가)는 $-$(두 근의 합)이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ $\therefore$ $-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=-\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}\leftarrow$ (나)

$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$

$cx^2+bx+a=0\leftarrow$ (다)

2. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(ⅰ) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ⅱ) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

3. 어떤 시험에서 다음과 같이 두 가지의 채점 기준 및 각 문항당 배점이 주어졌다고 한다. 철수의 점수는 채점 기준 (1) 에 의하면 84 점이고, 채점기준 (2) 에 의하면 66 점이다. 이 때, 무응답으로 남겨둔 문항수는?

	문항수	문항당 배점		
		정답	오답	무응답
채점기준(1)	30	5	−2	1
채점기준(2)	30	4	−1	0

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 18

해설

철수의 답안지에서 정답인 문항수를 x, 오답인 문항수를 y, 무응답인 문항수를 z라 하자.
총 문항수가 30 이므로 $x + y + z = 30$ ⋯⋯ ㉠
채점기준 (1) 에 의한 점수는
$5x - 2y + z = 84$ ⋯⋯ ㉡
채점기준 (2) 에 의한 점수는
$4x - y = 66$ ⋯⋯ ㉢
㉡ − ㉠ 에서 $4x - 3y = 54$ ⋯⋯ ㉣
㉢ − ㉣ 에서 $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$을 ㉢에 대입하면 $x = 18$
이것을 ㉠에 대입하면 $z = 6$
따라서 무응답인 문항수는 6

4. 다항식 $f(x)$ 를 $ax+b(a\neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x+\frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$ ② $\frac{b}{Ra}$ ③ $-\frac{b}{a}R$ ④ $\frac{aR}{b}$ ⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$\therefore\ x\cdot f(x)$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+Rx$

$=ax\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{b}{a}\right)-\frac{b}{a}R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\{axQ(x)+R\}-\frac{b}{a}R$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x)+R$

나머지는 $-\frac{bR}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$ 에서

나머지 정리에 의해 $f(-\frac{b}{a})=R$

$x\cdot f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q'(x)+R'$ 이라 하면

나머지 정리에 의해 $-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=R'$

$f(-\frac{b}{a})=R$ 를 대입하면 $R'=-\frac{b}{a}R$

5. $\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x=21$이라 하면

$\sqrt{21\cdot22\cdot23\cdot24+1}$

$=\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$=\sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$=\sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$=\sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$=x^2+3x+1\ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$=21^2+3\cdot21+1=505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

6. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\} z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

7. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x의 값으로 옳지 않은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 0　　② $\sqrt{3}$　　③ $-\sqrt{3}$　　④ 1　　⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3+3x^2i-3x-i) \\ &= (-3x^2+1)+(x^3-3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$\therefore\ x^3-3x=0$

$x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=0,\ \pm\sqrt{3}$

8. 복소수 z가 $z + |z| = 2 + 8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수) 일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z = a + bi$라 놓자.

$z + |z| = 2 + 8i$,

$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$

$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$

$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$

$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$ 양변제곱하면,

$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$

$4a = -60,\ a = -15$

$\therefore \ |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$

9. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$인 a, b, c에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$의 값은?

① $2a$　② $2b$　③ $-2c$　④ $-2a$　⑤ $-3b$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로, $a \le 0,\ b \le 0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{c}{b}}$ 이므로, $b < 0,\ c \ge 0$

$|a+b| > |c|$ 이므로, $-(a+b) > 0$

$\therefore\ a+b+c < 0$

$$\begin{aligned}\therefore(\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c\end{aligned}$$

10. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2-(a-2)x+a^2+a+2=0$의 두 실근을 α,β라 한다. 이 때, $(\alpha+1)(\beta+1)$의 최댓값을 구하면?

① 3　　② 2　　③ 1　　④ 0　　⑤ −1

해설

$\alpha,\ \beta$ 는 실수이므로

$D=(a-2)^2-4(a^2+a+2)\geq 0$

$\therefore\ \ -2\leq a\leq -\frac{2}{3}$

$\alpha+\beta=a-2,\ \alpha\beta=a^2+a+2$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1)&=\alpha\beta+\alpha+\beta+1\\&=a^2+a+2+a-2+1\\&=(a+1)^2\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-2$일 때 최댓값 $(-2+1)^2=1$

12. $\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$ 일 때, $x + y$의 값은?

① -2　② 2　③ $\frac{18}{5}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ ······㉠
$x + |y| - y = 12$ ······㉡
$x \le 0$이면, $y = 10$, $x = 12$
이것은 $x \le 0$을 만족하지 않는다.
$x > 0$이면 $2x + y = 10$······㉢
$y \ge 0$이면 $x = 12$, $y = -14$
이것은 $y \ge 0$을 만족하지 않는다.
$y < 0$이면, $x - 2y = 12$······㉣
㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}$, $y = -\frac{14}{5}$
$\therefore\ x + y = \frac{18}{5}$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x)-g(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 x^2+1 로 나눈 나머지가 $2x+4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$2f(x)-g(x)=(x^2+1)A(x)+R(x)$
$g(x)=(x^2+1)B(x)+R(x)$ 라 둘 수 있다.
따라서 $2f(x)=g(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$
$=(x^2+1)B(x)+R(x)+(x^2+1)A(x)+R(x)$
$=(x^2+1)\left\{A(x)+B(x)\right\}+2R(x)$
즉, $f(x)=(x^2+1)\frac{1}{2}\left\{A(x)+B(x)\right\}+R(x)$
$\therefore\ R(x)=2x+4$ 이고 $R(10)=24$

14. x^{100}을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$　② $100x-99$　③ $-100x-99$

④ $-99x-98$　⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ ($\Rightarrow a+1=b$)

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100$, $a+1=b$에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

15. x 가 실수일 때, $f(x)=(x^2+4x+6)(x^2+4x+2)+2x^2+8x+10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$t=x^2+4x+2=(x+2)^2-2\ge -2$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)=g(t)&=(t+4)t+2t+6\\&=t^2+6t+6=(t+3)^2-3\end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t=-2$ 일 때, 최솟값 -2 $(\because t\ge -2)$

16. 두 점 $\mathrm{A}(2, -2)$, $\mathrm{B}(4, 0)$과 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 동점 P에 대하여 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a, b), 그 때의 넓이의 최솟값을 S라 할 때, $a + b + S$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y = \frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$\therefore y = x - 4$

직선 AB와 평행하면서

$y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y = x + k$로 놓으면

$\frac{1}{2}x^2 = x + k$에서

$x^2 - 2x - 2k = 0 \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4} = 1 + 2k = 0 \qquad \therefore k = -\frac{1}{2}$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0 \qquad \therefore x = 1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$이고

그 때의 $\triangle\mathrm{ABP}$의 높이를 h라 하면

이 높이는 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$과 직선AB ,

즉, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$$h = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

이 때,

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(4-2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2}$이므로

$S = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{7}{4}\sqrt{2} = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b + S = 5$

17. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α를 가질 때, $a+b+c+\alpha$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2+b\alpha+c=0 & \cdots① \\ b\alpha^2+c\alpha+a=0 & \cdots② \\ c\alpha^2+a\alpha+b=0 & \cdots③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

① × α − ② : $a(\alpha^3-1)=0$,

$a\neq 0$이고 α는 실수이므로 $\alpha=1$

$\therefore\ a+b+c+\alpha=1$

18. N_1, N_2, N_3, $\cdots$, N_8은 모두 자연수이고,$N_1 < N_2 < \cdots < N_8$, $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_8 = 80$이라 할 때, N_8의 최댓값은? (단, $N_1 = 4$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_8$이므로 $N_2 = N_1 + 1$, $N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2, \cdots, N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$일 때, N_8은 최댓값이 된다.

$\therefore\ N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \cdots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$

$7N_1 + (1 + 2 + \cdots + 6) + N_8 = 80$

$28 + 21 + N_8 = 80$

$\therefore\ N_8 = 80 - 49 = 31$