

1. 다음은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0 (c \neq 0)$ 의 두 근이 α, β 일 때, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 구하는 과정이다.

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하는 이차항의 계수가

1 인 이차방정식은 $x^2 + [\text{가}]x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

이므로 구하는 방정식은 $x^2 + [\text{나}]x + \frac{a}{c} = 0$

이것을 정리하면 $[\text{다}] = 0$ 이다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $-\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right), -\frac{b}{c}, cx^2 - bx + a$
- ② $-\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right), \frac{b}{c}, cx^2 + bx + a$
- ③ $\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right), -\frac{b}{c}, cx^2 - bx + a$
- ④ $\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right), \frac{b}{c}, cx^2 + bx + a$
- ⑤ $\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right), \frac{b}{c}, cx^2 - bx + a$

해설

(가)는 $-(\text{두 근의 합})$ 이므로 $-\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \therefore -\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right)$

$-\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) = -\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} \leftarrow (\text{나})$

$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0$

$cx^2 + bx + a = 0 \leftarrow (\text{다})$

2. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$x^2 - 2x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t(t - 2) - 3 = 0,$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t - 3)(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 3 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ t = 3, \text{ 즉 } x^2 - 2x = 3 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$(ii) \ t = -1, \text{ 즉 } x^2 - 2x = -1 \text{ 일 때}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ (중근)}$$

$$\text{따라서, } -1 \times 3 \times 1 = -3$$

3. 어떤 시험에서 다음과 같이 두 가지의 채점 기준 및 각 문항당 배점이 주어졌다고 한다. 철수의 점수는 채점 기준 (1)에 의하면 84점이고, 채점기준(2)에 의하면 66점이다. 이 때, 무응답으로 남겨둔 문항수는?

	문항수	문항당 배점		
		정답	오답	무응답
채점기준(1)	30	5	-2	1
채점기준(2)	30	4	-1	0

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 18

해설

철수의 답안지에서 정답인 문항수를 x , 오답인 문항수를 y , 무응답인 문항수를 z 라 하자.

총 문항수가 30이므로 $x + y + z = 30$ ㉠

채점기준 (1)에 의한 점수는

$$5x - 2y + z = 84 \text{㉡}$$

채점기준 (2)에 의한 점수는

$$4x - y = 66 \text{㉢}$$

$$\text{㉡} - \text{㉠에서 } 4x - 3y = 54 \text{㉣}$$

$$\text{㉢} - \text{㉣에서 } 2y = 12$$

$$\therefore y = 6$$

$y = 6$ 을 ㉢에 대입하면 $x = 18$

이것을 ㉠에 대입하면 $z = 6$

따라서 무응답인 문항수는 6

4. 다항식 $f(x)$ 를 $ax + b(a \neq 0)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 한다. $xf(x)$ 를 $x + \frac{b}{a}$ 로 나눈 나머지를 구하면 ?

① $\frac{bR}{a}$

② $\frac{b}{Ra}$

③ $-\frac{b}{a}R$

④ $\frac{aR}{b}$

⑤ $-\frac{aR}{b}$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R$$

$$\therefore x \cdot f(x)$$

$$= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + Rx$$

$$= ax\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R\left(x + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}R$$

$$= \left(x + \frac{b}{a}\right)\{axQ(x) + R\} - \frac{b}{a}R$$

따라서, 구하는 몫은 $axQ(x) + R$

$$\text{나머지는 } -\frac{bR}{a}$$

해설

$$f(x) = (ax + b)Q(x) + R \text{에서}$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } f\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

$$x \cdot f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)Q'(x) + R' \text{이라 하면}$$

$$\text{나머지 정리에 의해 } -\frac{b}{a}f\left(-\frac{b}{a}\right) = R'$$

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = R \text{를 대입하면 } R' = -\frac{b}{a}R$$

5. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ &= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) + 1} \\ &= \sqrt{\{(x^2+3x) + 1\}^2} \\ &= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2+3x) + 1 > 0) \\ &= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ &\text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

6. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z \\ &= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

7. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned}i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\&= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i\end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

8. 복소수 z 가 $z + |z| = 2 + 8i$ 를 만족시킬 때, $|z|^2$ 의 값은? (단, $z = a + bi$ (a, b 는 실수)일 때, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.)

① 68

② 100

③ 169

④ 208

⑤ 289

해설

$z = a + bi$ 라 놓자.

$$z + |z| = 2 + 8i,$$

$$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$$

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2, \quad b = 8$$

$$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$$

$$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a \text{ 양변제곱하면,}$$

$$a^2 + 64 = (2 - a)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$4a = -60, \quad a = -15$$

$$\therefore |z|^2 = a^2 + b^2 = 225 + 64 = 289$$

9. $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}}$, $|a+b| > |c|$ 인 a, b, c 에 대하여 $\sqrt{(a+b+c)^2} - |a+b| - \sqrt{c^2}$ 의 값은?

① $2a$

② $2b$

③ $-2c$

④ $-2a$

⑤ $-3b$

해설

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이므로, } a \leq 0, b \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{ 이므로, } b < 0, c \geq 0$$

$$|a+b| > |c| \text{ 이므로, } -(a+b) > 0$$

$$\therefore a+b+c < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= |a+b+c| - |a+b| - |c| \\ &= -(a+b+c) + (a+b) - c \\ &= -2c \end{aligned}$$

10. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자

$$\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$m = \alpha \text{ 그리고 } \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$$

$$\alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - (a-2)x + a^2 + a + 2 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 한다. 이 때, $(\alpha+1)(\beta+1)$ 의 최댓값을 구하면?

① 3

② 2

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

α, β 는 실수이므로

$$D = (a-2)^2 - 4(a^2 + a + 2) \geq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq -\frac{2}{3}$$

$$\alpha + \beta = a - 2, \quad \alpha\beta = a^2 + a + 2$$

$$\begin{aligned}(\alpha+1)(\beta+1) &= \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \\ &= a^2 + a + 2 + a - 2 + 1 \\ &= (a+1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore a = -2 \text{일 때 최댓값 } (-2+1)^2 = 1$$

12.
$$\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$$
 일 때, $x + y$ 의 값은?

① -2

② 2

③ $\frac{18}{5}$

④ $\frac{22}{3}$

⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$

$x + |y| - y = 12 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$

$x \leq 0$ 이면, $y = 10$, $x = 12$

이것은 $x \leq 0$ 을 만족하지 않는다.

$x > 0$ 이면 $2x + y = 10 \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$

$y \geq 0$ 이면 $x = 12$, $y = -14$

이것은 $y \geq 0$ 을 만족하지 않는다.

$y < 0$ 이면, $x - 2y = 12 \dots\dots \textcircled{\text{㉤}}$

$\textcircled{\text{㉢}}$, $\textcircled{\text{㉤}}$ 에서 $x = \frac{32}{5}$, $y = -\frac{14}{5}$

$\therefore x + y = \frac{18}{5}$

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$2f(x) - g(x) = (x^2 + 1)A(x) + R(x)$$

$$g(x) = (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{ 이고 } R(10) = 24$$

14. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x + 101$

② $100x - 99$

③ $-100x - 99$

④ $-99x - 98$

⑤ $99x + 100$

해설

구하는 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + ax + b$$

x^{100} 을 $x+1$ 로 나누면 나머지는 1이므로

$$x^{100} = (x+1)^2 Q(x) + a(x+1) + 1 \quad (\Rightarrow a+1=b)$$

$$x^{100} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2)^{50} - 1 = (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x^2 - 1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x+1)(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\}$$

$$= (x+1) \{(x+1)Q(x) + a\}$$

$$(x-1) \{(x^2)^{49} + (x^2)^{48} + \cdots + x^2 + 1\} = (x+1)Q(x) + a$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1-1)(1^{49} + 1^{48} + \cdots + 1 + 1) = a$$

$$a = -100, a+1=b \text{에서 } b = -99$$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x - 99$

15. x 가 실수일 때, $f(x) = (x^2 + 4x + 6)(x^2 + 4x + 2) + 2x^2 + 8x + 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$t = x^2 + 4x + 2 = (x + 2)^2 - 2 \geq -2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= g(t) = (t + 4)t + 2t + 6 \\ &= t^2 + 6t + 6 = (t + 3)^2 - 3\end{aligned}$$

$\therefore g(t)$ 는 $t = -2$ 일 때, 최솟값 -2 ($\because t \geq -2$)

16. 두 점 A(2, -2), B(4, 0)과 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 동점 P에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌표를 (a, b) , 그 때의 넓이의 최솟값을 S 라 할 때, $a + b + S$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

직선 AB의 방정식은 $y = \frac{0+2}{4-2}(x-4)$

$$\therefore y = x - 4$$

직선 AB와 평행하면서

$y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프에 접하는 직선의 방정식을

$y = x + k$ 로 놓으면

$$\frac{1}{2}x^2 = x + k \text{에서}$$

$$x^2 - 2x - 2k = 0 \dots \text{㉠}$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 2k = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, \frac{1}{2})$ 이고

그 때의 $\triangle ABP$ 의 높이를 h 라 하면

이 높이는 점 $(1, \frac{1}{2})$ 과 직선 AB,

즉, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$$h = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

이 때,

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{7}{4}\sqrt{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a + b + S = 5$$

17. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근 α 를 가질 때, $a+b+c+\alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통 실근을 α 라 하면

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots ① \\ b\alpha^2 + c\alpha + a = 0 \cdots ② \\ c\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ③ \end{cases}$$

$$① + ② + ③ : (a+b+c)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

α 가 실수일 때 $\alpha^2 + \alpha + 1 > 0$

$$\therefore a+b+c=0$$

$$① \times \alpha - ② : a(\alpha^3 - 1) = 0,$$

$a \neq 0$ 이고 α 는 실수이므로 $\alpha = 1$

$$\therefore a+b+c+\alpha = 1$$

18. $N_1, N_2, N_3, \dots, N_8$ 은 모두 자연수이고, $N_1 < N_2 < \dots < N_8$,
 $N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_8 = 80$ 이라 할 때, N_8 의 최댓값은? (단,
 $N_1 = 4$)

① 29

② 30

③ 31

④ 32

⑤ 33

해설

$N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_8$ 이므로 $N_2 = N_1 + 1, N_3 = N_2 + 1 = N_1 + 2, \dots, N_7 = N_6 + 1 = N_1 + 6$ 일 때, N_8 은 최댓값이 된다.

$$\therefore N_1 + (N_1 + 1) + (N_1 + 2) + \dots + (N_1 + 6) + N_8 = 80$$

$$7N_1 + (1 + 2 + \dots + 6) + N_8 = 80$$

$$28 + 21 + N_8 = 80$$

$$\therefore N_8 = 80 - 49 = 31$$