

1. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2$, $y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

2. 다음 중 다항식 $x^4 - 5x^2 + 4$ 를 인수분해 할 때, 나타나는 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x - 2$ ③ $x - 3$ ④ $x + 1$ ⑤ $x + 2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)\end{aligned}$$

3. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

4.
$$\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$
을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \leq \beta$ 일 때,
 $\alpha + \beta$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - 3x \leq 0$ 에서
 $x(x - 3) \leq 0$ 이므로
 $0 \leq x \leq 3 \cdots (가)$
 $x^2 - 5x + 4 < 0$ 에서
 $(x - 1)(x - 4) < 0$ 이므로
 $1 < x < 4 \cdots (나)$
 $(가), (나)$ 에 의해
 $1 < x \leq 3$ 이므로
 $\alpha = 1, \beta = 3$
 $\therefore \alpha + \beta = 4$

5. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $xf(x)-3$ 을 $x+1$ 로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$$\therefore xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$$

$$\therefore xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)+R\} - R - 3$$

6. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$

7. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$

$\therefore a = 6$

8. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$$
$$\therefore N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$$
$$= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$$
$$\therefore \text{약수의 개수} = (6 + 1) \times (6 + 1) = 49$$

9. 이차함수 $y = 2x^2 - mx + 3$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 이 접할 때, 양수 m 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

이차함수와 직선이 접하면 두 방정식을 연립했을 때 판별식이 0 이다.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - mx + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - mx + 3 = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow D = (m + 2)^2 - 16 = 0$$

$$m = 2, -6$$

$$\therefore m = 2 \quad (\because m > 0)$$

10. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$x^2 - y^2 = 4 \text{ 에서 } y^2 = x^2 - 4 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

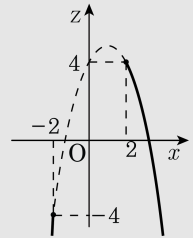
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$$

$$= -(x - 1)^2 + 5$$

$f(x) = -(x - 1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2, x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

11. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : cm²

▷ 정답 : 100cm²

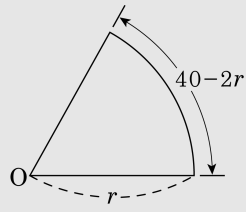
해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r) \\ = -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m² 이다.



12. 함수 $f(x) = x^2 + px + q$ 와 $g(x)$ 는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1) = 0$, $g(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}$ 이다. 이 때, $g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $x + 1$

② $x - 1$

③ $-x + 1$

④ $-x - 1$

⑤ $2x + 1$

해설

$g(x)$ 를 $f(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$g(x) = f(x)Q(x) + ax + b$$

$$g(\sqrt{2}+1) = f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1) + a(\sqrt{2}+1) + b \\ = a(\sqrt{2}+1) + b \quad (\because f(\sqrt{2}+1) = 0)$$

$$\therefore a + b + a\sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

따라서 구하는 나머지는 $x + 1$

13. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ (x, y 는 실수)로 놓으면 $(x + yi)^2 = \sqrt{5} + i$
 $x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 - y^2 = \sqrt{5}, 2xy = 1$
 $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ 이므로
 $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$
 $x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
 $\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i, \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i$
 $z^2\bar{z}^2 = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
 $z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
 $z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

14. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

15. 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 를 만족하는 x 가 오직 1개이기 위한 양수 a 가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$

② $2 < a < 5$

③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$

⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$ 의 해가

1개 존재하기 위해서는

$x^2 + ax + a + 3 = 0$ 이 중근을 가져야 한다.

$$\therefore D = a^2 - 4(a + 3)$$

$$= a^2 - 4a - 12$$

$$= (a - 6)(a + 2) = 0$$

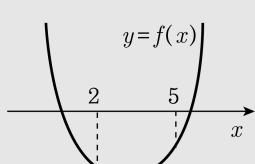
$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

16. 이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

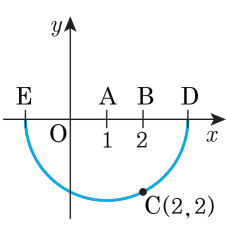
① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

이차방정식 $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서
 $(x - 2)(x - 5) = 0 \therefore x = 2$ 또는 $x = 5$
 $f(x) = x^2 - 6x + k$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.
따라서 $f(2) < 0$, $f(5) < 0$ 이므로
 $f(2) = -8 + k < 0$ 에서 $k < 8$
 $f(5) = -5 + k < 0$ 에서 $k < 5$
 $\therefore k < 5 \therefore$ 정수 k 의 최댓값은 4 이다.



17. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



- ① A ② B ③ C
 ④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 $\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.
 $\therefore$ 점 D의 좌표는 $(1 + \sqrt{5}, 0)$,
 점 E의 좌표는 $(1 - \sqrt{5}, 0)$ 이다.
 그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)의 그래프가 점 E를 지나므로
 $x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.
 여기서, a, b, c 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$
 ($\therefore$ 켈레근) 또한 방정식의 근이 된다.
 따라서, 그래프는 점 $D(1 + \sqrt{5}, 0)$ 을 지난다.

18. x 에 관한 방정식 $x^{1998} + 10x - 3 = 0$ 의 모든 근(1998개)에 대하여 각각의 근을 1998 제곱한 합을 구하면?

- ① 0
- ② -10
- ③ 5994
- ④ -5994
- ⑤ -59940

해설

$x^{1998} + 10x - 3 = 0$ 의 각각의 근을 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1998}$ 이라 하면
 $x^{1998} = -10x + 3$ 에서
 $x_1^{1998} = -10x_1 + 3, x_2^{1998}$
 $= -10x_2 + 3, x_3^{1998}$
 $= -10x_3 + 3 \cdots x_{1998}^{1998}$
 $= -10x_{1998} + 3$
 $\therefore x_1^{1998} + x_2^{1998} + x_3^{1998} + \cdots x_{1998}^{1998}$
 $= -10(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1998}) + 3 \times 1998$
 $= 0 + 3 \times 1998 = 5994 \text{ (}\because x_1 + x_2 + \cdots x_{1998} = 0 \text{)}$

19. 삼차 방정식의 $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 w 라 하고, 자연수 n 에 대하여 $f(n) = \frac{w^n}{1 + w^{2n}}$ 이라 할 때, $f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$x^3 - 1 = 0 \rightarrow w^3 = 1$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\rightarrow w^2 + w + 1 = 0$$

$$f(3n) = \frac{w^{3n}}{1 + w^{6n}} = \frac{(w^3)^n}{1 + (w^3)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$f(3n + 1) = \frac{w^{3n+1}}{1 + w^{6n+2}} = \frac{w}{1 + w^2} = -1$$

$$f(3n + 2) = \frac{w^{3n+2}}{1 + w^{6n+4}} = \frac{w^2}{1 + w} = -1$$

즉 $-1, -1, \frac{1}{2}$ 가 계속 반복되고

항이 번갈아 가면서 부호가 바뀌므로

순서대로 6개의 항까지의 값이 0이 된다.

$$\therefore f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= (-1) - (-1) + \frac{1}{2} - (-1) + \cdots + f(19)$$

$$= 0 + f(19) = -1$$

20. 연립방정식 $x^2 + y^2 = 5(xy - 1) = 10xy - 5(x + y)$ 의 해를 꼭지점으로 하는 도형의 넓이를 구하면?

- ① 1
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ 2
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 3

해설

$(x + y)^2 - 2xy = 5(xy - 1) = 10xy - 5(x + y)$ 에서
 $x + y = u, xy = v$ 라 놓으면

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 5(v - 1) \\ 5(v - 1) = 10v - 5u \end{cases} \text{ 에서 } \begin{cases} u^2 = 7v - 5 \\ v = u - 1 \end{cases} \text{ 을 풀면}$$

$$\therefore \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

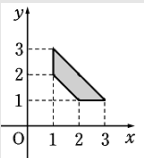
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 x, y 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 근이므로

$(x, y) = (1, 2), (2, 1)$

㉡의 x, y 는 $t^2 - 4t + 3 = 0$ 의 근이므로

$(x, y) = (1, 3), (3, 1)$



구하는 도형은 그림의 사각형이다.

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$