1. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$ ② $4x^2 - 7x + 3$ ③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$ ⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

2. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

3. $(1+ai)^2 = 2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(1+ai)^2 = 2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai = 2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2 = 0,\ 2a = 2$
$\therefore\ a = 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai) &= (1+i)(1-i)\\ &= 1-(-1)\\ &= 2\end{aligned}$$

4. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$ ② $-1-i$ ③ 0
④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$

$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$

$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$

$=\frac{1}{i}-1=-i-1$

5. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

6. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

7. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4-3x^3+3x^2+x-6=0$ 에서 $x=-1,\ x=2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$이므로 $-1+2=1$이다.

8. 사차방정식 $x^4+3x^2-10=0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4+3x^2-10=0$에서

$x^2=t$로 치환하면

$t^2+3t-10=0$, $(t+5)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-5$ 또는 $t=2$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$

9. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore$ $a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

10. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

11. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots㉠$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

12. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3 이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c &= (x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x+1)(x-1)Q_2(x) \end{aligned}$$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore \ abc=9$

13. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

14. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 직선 $y = bx$가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$일 때, $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a$ $\therefore$ P, Q의 x좌표는 $x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.

점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$이므로,

켤레근인 $2 - \sqrt{3}$은 점 Q의 x좌표이다.

근과 계수와의 관계에 의해서

$b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

$-a = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ $\therefore$ $a = -1$

$\therefore$ $a + b = (-1) + 4 = 3$

15. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$
② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$
③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$
④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$
⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x에 대하여

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$

$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 항상 성립하여야 한다.

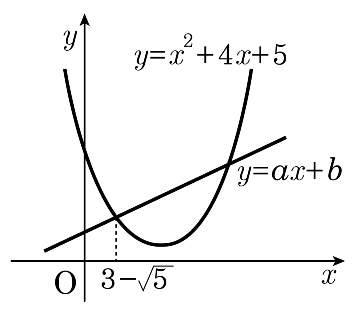
따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$ 의 판별식 $D < 0$이어야 한다.

$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$

$(m+2)(3m-2) > 0$

$\therefore m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$

16. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

17. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y=x^2-2ax+4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x)=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로
$x=a$ 일 때 최솟값, $x=a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4)=(a+4)^2-2a(a+4)+4=4$
$a^2+8a+16-2a^2-8a+4=4$
$a^2=16$
$\therefore a=4\ (a>0)$

18. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18　　② 9　　③ 7　　④ -9　　⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3$.
t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때, } y = -3 \\ t = 5\text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

19. $abc < 0$, $\frac{a-b}{c} > 0$인 세 실수 a, b, c에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $c > 0$이면 $a > b$이다.
② $a > 0$이면 $c < 0$이다.
③ $a > b$이면 $b < 0$이다.
④ $a > b$이면 $a > 0$이다.
⑤ $a < b$이면 $ab > 0$이다.

해설

① $c > 0$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $a-b > 0$ 즉, $a > b$
② $a > 0$이면, $b < 0$, $c > 0$일 때도 두 부등식이 성립하므로 $c < 0$라고 말할 수 없다.
③, ④ $a > b$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $c > 0$이므로 $ab < 0$이다.
따라서, $a > b$, $ab < 0$에서 $a > 0$, $b < 0$이다.
⑤ $a < b$이면, $\frac{a-b}{c} > 0$에서 $c < 0$이다.
따라서, $ab > 0$

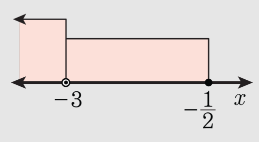
20. $|x+3| \le |x-2|$을 풀면?

① $x \le -3$　　② $-3 \le x \le -\frac{1}{2}$　　③ $-3 < x \le -\frac{1}{2}$

④ $2 \le x$　　⑤ $x \le -\frac{1}{2}$

해설

$|x+3| - |x-2| \le 0$



ⅰ) $x < -3$일 때

$-x-3+x-2 = -5 \le 0 \quad \therefore\ x < -3$

ⅱ) $-3 \le x < 2$일 때

$x+3+x-2 = 2x+1 \le 0$, $x \le -\frac{1}{2} \quad \therefore\ -3 \le x \le -\frac{1}{2}$

ⅲ) $x \ge 2$일 때

$x+3-x+2 = 5 \le 0$ (해가없다)

$\therefore$ ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $x \le -\frac{1}{2}$

21. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m<k<n$이다. 이 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하려면
판별식 $D<0$이다.
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)<0$
$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$
$-3<k<2$
$\therefore m=-3$, $n=2$
$\therefore$ $m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$

22. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=4$이다. 방정식 $f(4x-2)=0$의 두 근의 합은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -4 ⑤ 0

해설

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\beta$가 성립하면

$f(4x-2)=0 \Leftrightarrow 4x-2=\alpha$ 또는 $4x-2=\beta$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\alpha+2}{4}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+2}{4}$

즉 $f(4x-2)=0$의 두 근은 $\dfrac{\alpha+2}{4}$, $\dfrac{\beta+2}{4}$이다.

$\therefore \dfrac{\alpha+2}{4}+\dfrac{\beta+2}{4}=\dfrac{\alpha+\beta+4}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

23. 다음 연립부등식을 만족하는 정수 x의 개수는?

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + 4x - 3 \le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + 4x - 3 \le 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ : $x + 3 > 1, x + 3 < -1$

$x > -2$ 또는 $x < -4$

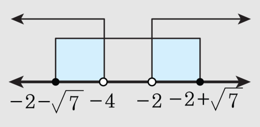
② : $x^2 + 4x - 3 = 0$ 에서

$x = -2 \pm \sqrt{4+3} = -2 \pm \sqrt{7}$

∴ 부등식의 해는

$-2 - \sqrt{7} \le x \le -2 + \sqrt{7}$

㉠과 ㉡의 공통 범위는



$-2 - \sqrt{7} \le x < -4, \quad -2 < x \le -2 + \sqrt{7}$

정수 x : $-1,\ 0$ (2 개)

24. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 8　② 16　③ 24　④ 36　⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에 주어진 수를 대입하여

$(ab+bc+ca)$의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c=2$이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

25. 두 다항식 $Q(x)$ 와 $R(x)$ 에 대하여 $x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) + R(x)$ 가 성립할 때, $Q(1)$ 의 값은? (단 $R(x)$ 의 차수는 이차 이하이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설

$R(x) = ax^2 + bx + c$($a,\ b,\ c$는 실수)라 하면
$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $-2 = c$
$x^7 - 2 = x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx - 2 \cdots$ ①
①의 양변에 $x = i$을 대입하면
$-i - 2 = -a + bi - 2$
$a = 0,\ b = -1$이므로 $R(x) = -x - 2$
$\therefore\ x^7 - 2 = (x^3 + x)Q(x) - x - 2$
양변에 $x = 1$을 대입하면
$-1 = 2Q(1) - 3$이므로
$\therefore\ Q(1) = 1$

26. $x^2-xy-6y^2+x+7y+k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면
$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$
$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.
$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서
$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$
$\therefore\ k = -2$

27. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

28. 다음의 x, y에 대한 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, $x+y$의 값을 구하라.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx+cy+a=0 \end{cases}$$

(단, a, b, c는 0이 아닌 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x+y=-1$

해설

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ㉠ \\ bx+cy+a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

해가 무수히 많으므로

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$가 성립한다.

따라서, $a=bk$, $b=ck$, $c=ak$에서

$abc=abck^3$, $abc \neq 0$이므로

$k^3=1$이다.

즉, $k=1$, $a=c$이므로

㉠, ㉡의 식은 $a(x+y+1)=0$

$a \neq 0$이므로

$x+y+1=0$에서 $x+y=-1$

29. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$ 이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ \cdots(\text{i})$

$b\alpha^2+c\alpha+a=0 \ \cdots(\text{ii})$

$c\alpha^2+a\alpha+b=0 \ \cdots(\text{iii})$

(i)+(ii)+(iii) 하면

$(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore \ a+b+c=0$

30. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$　　② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$　　④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

31. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$

(좌변)

$= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$

$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$

따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$이므로 $a^2 + b^2 = c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

32. $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$인 세 수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$의 값은?

① 4　　② 3　　③ 1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$a-b=2-\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉠

$b-c=2+\sqrt{3}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 계산하면 $a-c=4$

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-c^2b$

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot 4=4$

33. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 양변에 2를 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0, \beta^2+\beta+1=0 \cdots$ ①

$\therefore\ \alpha+1=-\alpha^2, \beta+1=-\beta^2$

①의 양변에 각각 $\alpha-1, \beta-1$ 을 곱하면

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0, (\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=1, \beta^3=1$

$(\alpha+1)^{10}+(\beta+1)^{10}$

$=(-\alpha^2)^{10}+(-\beta^2)^{10}$

$=(\alpha^3)^6\cdot\alpha^2+(\beta^3)^6\cdot\beta^2$

$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=-1\ (\because\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1\ )$

해설

$\alpha+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta+1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha+1=A,\ \beta+1=B$ 라 하면

$A+B=1, AB=1$ 이므로 $A,\ B$ 는

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근 이다.

$(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1=0$

$\therefore x^3=-1, A^3=B^3=-1$

$$\begin{aligned}(\text{준식})=A^{10}+B^{10} &= \left(A^3\right)^3\cdot A+\left(B^3\right)^3\cdot B\\ &=-(A+B)\\ &=-1\end{aligned}$$