

1. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 가 x 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$-2 = 2a \quad \therefore a = -1$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$-3 = -b \quad \therefore b = 3$$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 2c \quad \therefore c = 0$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

2. 다항식 $x^3 + ax + b$ 가 다항식 $x^2 - x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
 $x^2 = x - 1$ 을 대입하면
 $ax + (b - 1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로,
 $a = 0, b - 1 = 0$
 $\therefore a = 0, b = 1$
 $\therefore a + b = 1$

해설

$x^3 + ax + b$
 $= (x^2 - x + 1)Q(x)$
 $= (x^2 - x + 1)(x + b)$
 $\therefore b = 1, a = 0$

3. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$ 으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$$

$$\therefore 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13$, $b = 8$

4. $(a+1)(a^2-a+1) = a^3+1$ 을 이용하여 $\frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a = 1999$ 라 하면

$$1998 \times 1999 + 1 = (a-1)a + 1 = a^2 - a + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1999^3+1}{1998 \times 1999+1} &= \frac{a^3+1}{a^2-a+1} \\ &= \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} \\ &= a+1 = 2000\end{aligned}$$

5. $2|x-1|+x-4=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x < 1$ 일 때,
 $-2(x-1) + (x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$
ii) $x \geq 1$ 일 때,
 $2(x-1) + x-4 = 0$
 $\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

6. 이차방정식 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 일 때, $(\alpha^2 + \beta^2) + 5(\alpha + \beta)$ 의 값을 구여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2 + 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서

$$\alpha + \beta = -7, \alpha\beta = 1$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-7)^2 - 2 \cdot 1 = 47$$

$$\therefore 47 + 5 \cdot (-7) = 47 - 35 = 12$$

7. 다음 중 방정식 $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -1

② 1

③ 2

④ $1 + 2i$

⑤ $1 - 2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10 = 0$$

$$(x + 1)(x^3 - 4x^2 + 9x - 10) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2)(x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i) = 0$$

$$\therefore x = -1, 2, 1 + 2i, 1 - 2i$$

따라서 근이 아닌 것은 1 이다.

8. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식 : } 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

9. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

② $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

③ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

④ $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

⑤ $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = a^4 - a^2 + 1$

해설

⑤ $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1) = (a^2 + 1)^2 - a^2$
 $= a^4 + a^2 + 1$

10. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
 $\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

11. $\frac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$ 인 어떤 x, y 의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\frac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$ 라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y 에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y 에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0, a+k=0, -b+k=0$

$\therefore k=2, a=-2, b=2$

$\therefore a-b=-4$

12. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는 -5 이고, $x-1$ 로 나눈 나머지는 -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

한편, $f(x)$ 를 $x+1$, $x-1$ 로 나눈 나머지가 각각 -5 , -1 이므로

$$f(-1) = -a + b = -5, \quad f(1) = a + b = -1$$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$ 이다.

13. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

14. 두 실수 x, y 가 $x + y = -5$, $xy = 2$ 를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

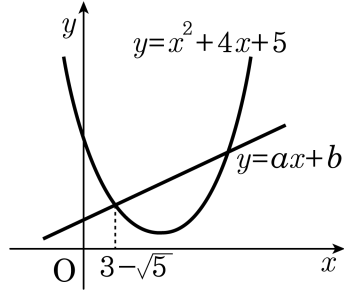
- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x + y = -5$, $xy = 2$ 에서 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

15. 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 x 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?



- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$, $y = ax + b$ 에서
 y 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
 $x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots \textcircled{1}$
 이 때, 계수가 유리수인 방정식 $\textcircled{1}$ 의 한 근이
 $3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
 $\therefore (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
 $(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
 $\therefore a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 3$

16. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

17. 너비가 40cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

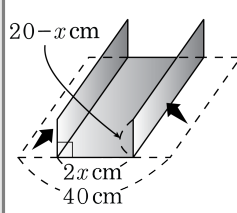
① 10 ② 8 ③ 6 ④ 4 ⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20 - x$ 이다.
단면의 넓이는

$$2x(20-x) = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x + 200) + 100 = -2(x-10)^2 + 200$$

$\therefore x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 1 개

▶ 정답 : 1 개

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } x^2 - (y - 3)^2 = 0$$

$$(x + y - 3)(x - y + 3) = 0$$

$$y = x + 3 \text{ 또는 } y = -x + 3$$

i) $y = -x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 이 때, } y = 1$$

ii) $y = x + 3$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면,

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{이 때, } y = 2 \pm \sqrt{3}i$$

i), ii)에서 실수해의 순서쌍은 (2, 1)이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1 개이다.

19. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

20. 복소수 z 에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$ 은 양의 정수인 z 의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 6개
- ② 7개
- ③ 8개
- ④ 9개
- ⑤ 10개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i - 1$	0	$i + 1$
2	$-1 + i$	-2	$-1 - i$	0
3	0	$-i - 1$	$-2i$	$-i + 1$
4	$1 + i$	0	$1 - i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$

∴ 9개

21. $a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

② 0

③ 1

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $-1 + \sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2a + 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$$4a^2 + 4a + 1 = -3 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$$

$$\therefore a^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = a^3 a^2 + a^3 - 1$$

$$= a^2$$

$$= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0)$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

22. m 은 양의 정수이고, x 에 관한 이차방정식 $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + m\sqrt{2} - 4 = 0$ 의 한 근은 정수이다. 이 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α 라 하자
 $\alpha^2 - (3 + \sqrt{2})\alpha + m\sqrt{2} - 4 = 0$
 $(m - \alpha)\sqrt{2} + \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $m = \alpha$ 그리고 $\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$
 $(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0$
 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = 4$
 m 이 양의 정수이므로 $\alpha = 4$ 에서 $m = 4$

23. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 두 수 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 - bx + 4 = 0$ 이다. 이 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a$
한편, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하는 방정식은
 $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = a + 2$
 $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha\beta) = 2a$ 에서
 $x^2 - (a + 2)x + 2a = 0 \dots\dots\text{㉠}$
㉠이 $x^2 - bx + 4 = 0$ 과 같으므로
 $a + 2 = b, 2a = 4$ 에서 $a = 2, b = 4$
 $\therefore a + b = 2 + 4 = 6$

24. 이차함수 $y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 때, 정수 m 의 최솟값은?

- ① 2
- ② 1
- ③ 0
- ④ -1
- ⑤ -2

해설

$y = -x^2 - 6x - 3$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로
 $2m$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y - 2m = -(x - m)^2 - 6(x - m) - 3$
즉, $y = -x^2 + 2(m - 3)x - m^2 + 8m - 3$ 이
그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
 $\frac{D}{4} = (m - 3)^2 - m^2 + 8m - 3 > 0$
 $2m + 6 > 0$
 $\therefore m > -3$
따라서 정수 m 의 최솟값은 -2 이다.

25. $x^3 = 1$ 의 세 근이 a, b, c 이다. $22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$ 의 값이 실수 일 때, 이 실수 값을 구하면?

① 60

② 65

③ 68

④ 72

⑤ 75

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \quad b^3 = 1 \quad c^3 = 1$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $\therefore 22a^{21} + 21b^{22} + 22c^{21}$
 $= 22(a^3)^7 + 21(b^3)^7b + 22(c^3)^7$
 $= 21b + 44$ 이 값이 실수이므로
①에서 $b = 1$ 이다.
 $\therefore 21b + 44 = 65$

26. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 6 = 0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?
- ① -1 ② 3 ③ $-1, -3$
④ $1, 3$ ⑤ $-3, 1$

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로 $D/4 = (a + 2)^2 - 2a^2 - 6 \geq 0$ 에서 $2 - \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{2} \cdots \textcircled{1}$
그런데 a 는 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a = 1, 2, 3$
i) $a = 1$ 일 때 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 의 두 근은
 $x = 2, 4$ (조건을 만족)
ii) $a = 2$ 일 때 $x^2 - 8x + 14 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4 \pm \sqrt{2}$ (조건에 위배)
iii) $a = 3$ 일 때 $x^2 - 10x + 24 = 0$ 의 두 근은
 $x = 4, 6$ (조건을 만족)
i), ii), iii)에서 $a = 1, 3$

27. x 에 대한 다항식 $(1+x-x^2)^{10}$ 을 전개하면 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이 될 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}$ 의 값은? (단, a_i 는 상수이고 $i=0, 1, 2, \cdots, 20$)

① 2^{10}

② $2^{10}-1$

③ 2

④ 1

⑤ 0

해설

$(1+x-x^2)^{10}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{20}x^{20}$ 이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{19}+a_{20}\cdots \textcircled{1}$$

또, 이 식에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1=a_0-a_1+a_2-\cdots-a_{19}+a_{20}\cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}\text{을 하면 } 2=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=1$$

28. $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$ 을 인수분해했을 때, 각 인수들의
합이 될 수 없는 것은?

- ① $a + b$
- ② $2a - 2b$
- ③ $2b - 2a$
- ④ $2b - 2c$
- ⑤ 0

해설

a 에 대한 내림차순으로 정리한다.
 $-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)$
 $= (c-b)a^2 - (c^2-b^2)a + bc^2 - b^2c$
 $= (c-b)a^2 - (c-b)(c+b)a + bc(c-b)$
 $= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\}$
 $= (c-b)(a-b)(a-c) \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $= (a-b)(b-c)(c-a) \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $= (b-c)(b-a)(a-c) \cdots \textcircled{\text{㉢}}$
 $= (c-a)(b-c)(b-a) \cdots \textcircled{\text{㉣}}$
㉠식 : 세항을 모두 더하면 $2a - 2b$
㉡식 : 세항을 모두 더하면 0
㉢식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2c$
㉣식 : 세항을 모두 더하면 $2b - 2a$

29. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $a > 0$)라 두면

$$\alpha^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = i$$

$$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$$

$$a^3 - 3ab^2 = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad 3a^2b - b^3 = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a^2 = 3b^2$ 을 얻어 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \frac{1}{\alpha} &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

해설

$$\alpha^3 = \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = i + \frac{1}{i} + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 = 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \left\{ \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3 \right\} = 0$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \neq 0, \alpha + \frac{1}{\alpha} > 0$$

($\because$ 복소수 α 의 실수부가 양이므로)

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{3}$$

30. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$ 이 허근 α 를 갖고, α^3 이 실수일 때, m 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 3
- ④ 0, 3
- ⑤ 0, 1, 3

해설

α^3 이 실수이므로 $\bar{\alpha}^3 = \alpha^3$,
 $(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2) = 0$
 α 는 허수이므로 $\alpha \neq \bar{\alpha}$
 $\therefore \alpha^2 + \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 = 0 \dots\dots (i)$
근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \bar{\alpha} = m - 1, \alpha\bar{\alpha} = m + 1$
(i)은 $(\alpha + \bar{\alpha})^2 - \alpha\bar{\alpha} = 0, (m - 1)^2 - (m + 1) = 0$
 $m^2 - 3m = m(m - 3) = 0$
 $\therefore m = 0, 3$
이차방정식 $x^2 - (m - 1)x + (m + 1) = 0$ 이
허근을 가지므로 $D = (m - 1)^2 - 4(m + 1) < 0$
 $m = 0, 3$ 은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

31. x 에 대한 방정식 $f(x) = x^3 + x^2 + (a^2 - 4a - 2)x + (2a^2 - 8a) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 갖도록 a 의 값을 정할 때, 정수 a 의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

$$f(x) = (x+2)(x^2 - x + a^2 - 4a) = 0$$

여기서, $x = -2$ 는 $x^2 - x + a^2 - 4a = 0$ 의 근이 될 수 없다.

$$(\because (-2)^2 - (-2) + a^2 - 4a = (a-2)^2 + 2 \neq 0)$$

따라서, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면,

$$x^2 - x + a^2 - 4a = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가지면 된다.}$$

$$\therefore D = 1 - 4(a^2 - 4a) > 0, 4a^2 - 16a - 1 < 0$$

$$\therefore \frac{4 - \sqrt{17}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{17}}{2}$$

따라서, a 의 정수값은 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

32. A가 서울에서 부산으로 출발하고, B는 A보다 30분 늦게 부산에서 서울로 출발했다. A와 B는 낮 12시에 도중에서 만난 후 A는 오후 3시에 부산에, B는 오후 1시 40분에 서울에 각각 도착했다고 한다면 A가 서울을 출발한 시각은? (단, A와 B의 속력은 각각 일정하다.)
- ① 9시 ② 9시 30분 ③ 10시
- ④ 10시 30분 ⑤ 11시

해설

A, B의 속도를 각각 x /시, y /시
A가 출발한 후 B를 만날 때까지의 시간을
 t (시간)라 하면 A가 B를 만나기 직전까지
움직인 거리 xt 를 가는데 B는 1시간 40분 걸렸으므로
 $xt = \frac{5}{3}y \cdots \text{㉠}$
또, B가 A를 만나기 직전까지 움직인 거리
 $y\left(t - \frac{1}{2}\right)$ 을 가는데
A는 3시간 걸렸으므로
 $y\left(t - \frac{1}{2}\right) = 3x \cdots \text{㉡}$
 $\text{㉠}, \text{㉡}$ 에서 $xyt\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5xy$
 $\Leftrightarrow t\left(t - \frac{1}{2}\right) = 5$
 $2t^2 - t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(2t - 5) = 0$
 $\therefore t = \frac{5}{2}$
따라서, A가 B를 만날 때까지 걸린 시간이 2시간 30분이므로
A가 서울을 출발한 시간은 9시 30분이다.

33. 부등식 $4 \leq x \leq y \leq z$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 에 대하여 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ 이 성립할 때, (x, y, z) 의 개수를 구하면?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$ 일 때, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{4}$
 $yz = 4(y+z), (y-4)(z-4) = 16$
 $4 \leq x \leq y \leq z$ 이므로
 $(x, y, z) = (4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8)$
 $\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ 일 때, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$ 에서 $\frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$
 $\therefore (x, y, z) = (5, 5, 10)$
 $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$ 일 때, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}, \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{3}$
 $yz = 3(y+z), (y-3)(z-3) = 9$
 $4 \leq x \leq y \leq z$ 이므로
 $(x, y, z) = (6, 6, 6)$ $x = y = z = 6$ 이므로
 $x > 6$ 이면 $4 \leq x \leq y \leq z$ 를 만족하지 않는다.
따라서, 주어진 조건을 만족하는 자연수
 (x, y, z) 는 $(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8), (5, 5, 10), (6, 6, 6)$ 5개이다.