

1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$$

$$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$$p = -\frac{2}{3}, q = -5$$

$$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$$

2. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 점(1,2) 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최솟이며, 최솟값은

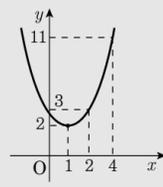
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$$\therefore M = 11$$

$$\therefore M + m = 14$$



3. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M+m$ 은 $a=0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

4. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서
 $x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면
 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) + 4$
 $= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
 $t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2$, $M = 1$
 $\therefore M + m = -1$

5. 실수 x, y 가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족시킬 때, x 의 최댓값과 y 의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$

② $2\sqrt{2} + 1$

③ $2\sqrt{2} + 2$

④ $\sqrt{2} + 4$

⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0 \text{을}$$

(i) x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0 \text{에서 } x \text{가 실수이므로}$$

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0, y^2 \leq 4$$

$$\therefore -2 \leq y \leq 2$$

따라서, y 의 최댓값은 2이다.

(ii) y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0 \text{에서 } y \text{가 실수이므로}$$

$$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0, x^2 \leq 8$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

따라서, x 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$