1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$　　② $-3x^2 + 24x + 21$

③ $3x^2 - 12x + 21$　　④ $-3x^2 - 24x + 21$

⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

2. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$ ② $2x$ ③ $3x+2$
④ $4x$ ⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1,\ \ R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

3. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$　② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$　④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x+1)^2 + 1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 66

해설

$f(x-1) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5$
$= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0, 1, 2$를 차례로 대입하면,
$x = 0$일 때, $-1 = C$
$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$
$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A = -6, B = 11, C = -1$

5. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면
$f(1)=0, f(3)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

6. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

7. $a=\frac{1+i}{1-i}$ 일 때, $a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^{100}$ 의 값을 구하면?

① i ② $-i$ ③ -1 ④ 1 ⑤ 0

해설

$a=\frac{1+i}{1-i}=i$

$a+a^2+a^3+a^4=i-1-i+1=0$ 이고

$\therefore (a+a^2+a^3+a^4)+\ \cdots+(a^{97}+a^{98}+a^{99}+a^{100})=0$

8. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, a는 실수)

① a ② $a+1$ ③ $a-1$
④ a^2-1 ⑤ a^2+1

해설
$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$
$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$
$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

9. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

10. 이차방정식 $x^2-2ax-3a=0$이 중근을 갖도록 하는 a의 값과 그 때의 중근을 구한 것은?

① $a=-3,\ x=-3$　　② $a=-3,\ x=0$

③ $a=0,\ x=-3$　　④ $a=3,\ x=0$

⑤ $a=3,\ x=3$

해설

$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-3a)=0$

$a^2+3a=0,\ a(a+3)=0$

$a=-3$ 또는 0

(ⅰ) $a=-3$일 때,

$x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

$\therefore x=-3$(중근)

(ⅱ) $a=0$일 때,

$x^2=0$

$\therefore x=0$

11. $a>0,\ b>0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이고, $a<0,\ b<0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha<0,\ \beta<0$

$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$=(\alpha+\beta)-2\cdot\sqrt{\alpha\beta}=-3-2\cdot1=-5$

12. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i,\ 3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i,\ 2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3-2i)(3+2i) = 9 + 4 = 13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$=-\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right| = \left|\frac{b}{a} \times \frac{c}{a}\right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

13. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$y=3-x \geq 0$
$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$
$x=1$ 일 때, $m=6$
$x=3$ 일 때, $M=18$
$\therefore\ M-m=12$

14. 다음 연립방정식의 해를 $x=a,\ y=b,\ z=c$라 할 때, $a+b+c$의 값은?

$$\begin{cases} x+y-z=3 \\ x-y+3z=-5 \\ 3x-2y+z=7 \end{cases}$$

① 1　② −1　③ 12　④ −3　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} x+y-z=3 \cdots ㉠ \\ x-y+3z=-5 \cdots ㉡ \\ 3x-2y+z=7 \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ + ㉡하면 $2x+2z=-2,\ x+z=-1 \cdots$ ㉣

㉡ × 2 − ㉢하면 $-x+5z=-17 \cdots$ ㉤

㉣, ㉤ 연립하면, $z=-3,\ x=2,\ y=-2$

$\therefore a=2,\ b=-2,\ c=-3$

$\therefore\ a+b+c=-3$

15. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

16. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식})=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x+1$$
$$=2006$$

17. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$ 일 때, a^5+b^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$\therefore\ a^5+b^5=(a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)$

$=28\times10-9\times4$

$=244$

18. x에 대한 삼차식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+8$은 $(x+2)^2$으로 나누어 떨어지고, $1-f(x)$는 x^2-1로 나누어 떨어질 때, $f(x)$의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$f(x)+8=(x+2)^2(ax+b)\cdots$㉠
$1-f(x)=(x^2-1)Q(x)\cdots$㉡
㉡에서 $f(1)=1,\ f(-1)=1$
그러므로 ㉠에서
$1+8=9(a+b)\cdots$㉢
$1+8=-a+b\cdots$㉣
㉢, ㉣에서 $a=-4,\ b=5$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(-4x+5)-8$
$\therefore$ 상수항은 $f(0)=2^2\cdot 5-8=12$

19. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\
&= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18) + 21x^2 \\
&= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\} + 21x^2 \\
&= (x^2-18)^2 - 4x(x^2-18) - 21x^2 + 21x^2 \\
&= (x^2-18)(x^2-4x-18)
\end{aligned}
$$

따라서 $p=-18,\ g=-4$

$\therefore pg = (-18)\times(-4) = 72$

20. $a+b+c=0$일 때, $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ac}+\dfrac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(준식) = \dfrac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$= \dfrac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$\therefore \dfrac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\dfrac{3abc}{abc}=3$

21. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y$, z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$

$= \left\{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\right\} z$

$= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z$

$\therefore\ (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0$

$x^2 + z^2 - y^2 = 0$ ($\because$ x, y, z는 모두 양수)

$\therefore\ x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

22. $\dfrac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 31

해설

$2^5 = x$라 두면

$$\begin{aligned}\frac{2^{40}-2^{35}-2^{5}+1}{2^{35}-1} &= \frac{x^8-x^7-x+1}{x^7-1}\\ &= \frac{(x-1)(x^7-1)}{x^7-1}\\ &= x-1 = 2^5-1 = 31\end{aligned}$$

23. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a \text{ 대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

24. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$ 의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab 의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2 \geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1 \geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2 \leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab \\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab \\ &= -1\end{aligned}$$

25. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 10　　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20,$

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

26. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8} = 2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4 = p^2+8p+16-4q+8,\ 4q = p^2+8p+20$

$q = \dfrac{1}{4}p^2+2p+5 = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta = p+4, \alpha\beta = q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = 2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)} = 2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2) = 4$

q에 대해 정리하면

$q = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

27. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서 $(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$a^2 - 12 < 0$ 에서 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

$\therefore a = 2$

28. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

29. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ⅱ) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

30. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore\ 2+c=5,\ 4+2c=a,\ 10-c=b$

$\therefore\ a=10,\ b=7,\ c=3$

31. 어느 4개의 정수 중 3개씩 더한 합이 각각 166, 199, 208, 216일 때, 네 수 중 가장 큰 수는?

① 65 ② 73 ③ 87 ④ 91 ⑤ 97

해설

네 정수를 $a \geq b \geq c \geq d$라 하자. 세 개씩 더한 합 중에서 $a+b+c=216$, $b+c+d=166$ 또 $a+b+d$ 와 $a+c+d$는 $a+b+d \geq a+c+d$이므로 $a+b+d=208$, $a+c+d=199$

네 식을 모두 더하면 $3(a+b+c+d)=166+199+208+216=789$

$\therefore\ a+b+c+d=263$

$a=263-166=97$

32. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + 4mx - (2m-1) = 0 \\ x^2 + mx + (m+1) = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, m의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + 4m\alpha - (2m-1) = 0 \cdots$ ㉠

$\alpha^2 + m\alpha + (m+1) = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$3m\alpha - 3m = 0$

$3m(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore\ m = 0,\ \alpha = 1$

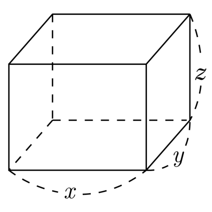
$m = 0$일 때 두 방정식이 일치하므로

단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합

$\alpha = 1$을 ㉡에 대입

$1 + m + m + 1 = 0 \quad \therefore\ m = -1$

33. 다음 그림과 같이 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 x, y, z 인 직육면체의 12 개의 모서리의 길이가 평균이 8 , 표준편차가 2 이다. 이 때, 6 개면의 넓이의 평균은?



① 53　② 56　③ 59

④ 62　⑤ 65

해설

$$\frac{4(x+y+z)}{12}=8 \Rightarrow x+y+z=24$$

$$\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{12}-8^2=4$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=204$$

$$xy+yz+zx=\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{2}=186$$

$$\frac{2(xy+yz+zx)}{6}=\frac{xy+yz+zx}{3}=\frac{186}{3}=62$$

34. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\frac{D}{4}\geq 0$

$$\frac{D}{4}=(x+6)^2-5(2x^2+6x+9)$$
$$=-9x^2-18x-9=-9(x+1)^2\geq 0$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

35. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)=2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$　② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$　③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$　⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a<b<c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=2$를 만족하는 순서쌍은 $(1,-1,-2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha-a=1$
$\alpha-b=-1$
$\alpha-c=-2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha=a+b+c-2$, $\alpha=\dfrac{a+b+c-2}{3}$

36. n이 자연수일 때, x의 정식 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 3

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)\cdots$①

$x=3$을 대입하면 $3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore\ b=-3a-9\cdots$②

②를 ①에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$\therefore\ (x-3)\{x^n(x+a+3)\}=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

양변을 $x-3$으로 나눈 몫을 비교하면

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

$x=3$을 대입하면 $3^n(6+a)=3^n\ \therefore\ 6+a=1\ \therefore\ a=-5$

②에서 $b=6$

$\therefore\ a=-5,\ b=6\ \therefore\ a+b=1$

37. x^{100} 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$

④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$

x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로

$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ ($\Rightarrow a+1=b$)

$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$

$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$

$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$

$a=-100$, $a+1=b$에서 $b=-99$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$

38. x^8을 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_1(x)$, $\sqrt{r_1}$이고, $q_1(x)$를 $x-2$로 나눌 때의 몫과 나머지가 각각 $q_2(x)$, $\sqrt{r_2}$일 때, $\frac{r_2}{r_1}$의 값은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ 16　④ 21　⑤ 64

해설

$x^8 = (x-2)q_1(x) + \sqrt{r_1}$ $\cdots\cdots$ ①

$q_1(x) = (x-2)q_2(x) + \sqrt{r_2}$ $\cdots\cdots$ ②

①에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$\sqrt{r_1} = 2^8$, $r_1 = 2^{16}$

또, $q_1(x) = \frac{x^8 - \sqrt{r_1}}{x-2} = \frac{x^8 - 2^8}{x-2}$

$= (x^7 + 2x^6 + \cdots + 2^7)$

②에서 $x = 2$를 양변에 대입하면

$q_1(2) = \sqrt{r_2}$, $r_2 = \{q_1(2)\}^2$

그런데 $q_1(2) = 8 \cdot 2^7 = 2^{10}$

$\therefore$ $r_2 = 2^{20}$

따라서, $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2^{20}}{2^{16}} = 2^4 = 16$

39. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$를 $(x-3)^2(x+3)$으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$ ② $3x^2+2x-5$ ③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$
④ x^2+2x-5 ⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$f(-3)=4$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+ax^2+bx+c$
$f(x)=(x-3)^2(x+3)Q(x)+a(x-3)^2$($\because$ $f(x)$는 $(x-3)^2$으로 나누어 떨어진다.
$f(x)=(x-3)^2\{(x+3)Q(x)+a\}$
$f(-3)=(-3-3)^2a=4$
$\therefore\ a=\frac{1}{9}$
$\therefore$구하는 나머지 : $\frac{1}{9}(x-3)^2$

40. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$는 실수)라 하면

$(a+bi)^2 = a - bi$

$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$2ab = -b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$

(i) $b = 0$ 일 때 ㉠에서 $a^2 = a$

$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = 1$

(ii) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, $z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$