1. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

2. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　② 2　③ -2　④ 4　⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 = 8+(-12) = -4$

3. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x = 0$일 때, $-1 = C$
$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$
$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A = -6,\ B = 11,\ C = -1$

5. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

6. 복소수 $(1+2i)x-(2+i)y+i$를 제곱하였더니 -9가 되었다. 이 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이고 x, y는 실수이다.)

① 2 또는 −4　② 2 또는 −3　③ −1 또는 3
④ −1 또는 −3　⑤ −1 또는 −2

해설

$z=(x-2y)+(2x-y+1)\,i$

$z^2=-9$

즉, z는 순허수이다.

$\therefore\ x-2y=0,\ (2x-y+1)^2=9$

$x=2y$ 와 $2x-y+1=\pm 3$을 연립하여 풀면

$y=\frac{2}{3}\rightarrow x=\frac{4}{3}$

$y=-\frac{4}{3}\rightarrow x=-\frac{8}{3}$

$\therefore\ x+y=2$ 또는 -4 이다.

7. $x,\ y$가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답：

▷ 정답： 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because\ x,\ y$ 는 양의 실수)

8. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$ 에 대하여 $z-\overline{z}=2i$, $\dfrac{\overline{z}}{z}=-i$ 가 성립할 때, $z\cdot\overline{z}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 5　　④ 8　　⑤ 13

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면 $\overline{z}=a-bi$

$z-\overline{z}=2i$ 에서 $a+bi-(a-bi)=2i$, $2bi=2i$

$\therefore\ b=1$

$\dfrac{\overline{z}}{z}=-i$ 에서 $\dfrac{a-i}{a+i}=-i$

$\dfrac{(a-i)^2}{a^2+1}=-i$, $\dfrac{a^2-1-2ai}{a^2+1}=-i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0 이어야 하므로

$\dfrac{a^2-1}{a^2+1}=0$, $a^2-1=0$

$\therefore a=\pm1 \qquad \cdots$ ㉠

(ii) 허수부분이 -1 이어야 하므로

$\dfrac{-2a}{a^2+1}=-1$, $a^2+1=2a$

$a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1 \qquad \cdots$ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a=1$

$\therefore\ z\cdot\overline{z}=(1+i)(1-i)=1+1=2$

9. 다음을 계산하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 + 3i$

해설

$$\sqrt{3}\sqrt{-3} + \sqrt{-3}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$$
$$= \sqrt{3 \cdot (-3)} - \sqrt{(-3) \cdot (-3)} + \sqrt{\frac{-18}{2}} - \sqrt{\frac{18}{-2}}$$
$$= \sqrt{-9} - \sqrt{9} + \sqrt{-9} - \sqrt{-9}$$
$$= -\sqrt{9} + \sqrt{-9}$$
$$= -3 + 3i$$

10. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　② -5　③ 3　④ 6　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.

$\therefore$ 두 근의 합 $-a = 4$　$\therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10$

$\therefore a + b = 10 - 4 = 6$

11. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot2+12=9$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ b가 빗변인 직각삼각형
④ $a = b$인 이등변삼각형
⑤ $b = c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$이
방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$
$\therefore b^2 = a^2 + c^2$
따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

13. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(ⅰ) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$
(ⅱ) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

14. x, y에 관한 연립방정식 $\begin{cases} kx+y=-3 \\ 2x+(k-1)y=6 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때의 k의 값을 α, 해가 없을 때의 k의 값을 β라 하면, $\alpha+\beta$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

해가 무수히 많을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}=\frac{-3}{6}$

해가 없을 조건은 $\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}\neq\frac{-3}{6}$

$\frac{k}{2}=\frac{1}{k-1}$ 에서 $k(k-1)=2$,

$k^2-k-2=0$

$\therefore\ k=-1,\ 2$

(ⅰ) $k=-1$일 때,

$\frac{-1}{2}=\frac{1}{-1-1}=\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 무수히 많다.

(ⅱ) $k=2$일 때,

$\frac{2}{2}=\frac{1}{2-1}\neq\frac{-3}{6}$ 이므로 해가 없다.

$\therefore\ \alpha=-1,\ \beta=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

15. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

16. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1} \\
&= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} \\
&= x+1 \\
&= 2006
\end{aligned}
$$

17. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ 에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times18-1^2\times3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

18. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\frac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\frac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면
$ax^2+4x+b=k(x-2)$
$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$
x에 대한 항등식이므로
$a=0$
$4-k=0$에서 $k=4$
$b+2k=0$에서 $b=-8$
$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.
$\frac{ax^2+4x+b}{x-2}=\frac{4(x-2)}{x-2}=4$
$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

19. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
$f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$
$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$
$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

20. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

21. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

22. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha=\overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$이다.
㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.
㉣ $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha=\overline{\beta}$이므로 $\beta=a-bi$
$\therefore\ \alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$\therefore\ \alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta=a^2+b^2=0$, a, b는
실수이므로 $a=0$, $b=0$ 즉, $=a+bi=0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha=i$, $\beta=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=i^2+1^2=0$
㉣ :(반례) $\alpha=1$, $\beta=i$
$\therefore\ \alpha+\beta i=0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

23. $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$=(-w-2)^2+(w-1)^2$

$=w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$=2w^2+2w+5$

$=2(w^2+w+1)+3$

$=3$

24. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

25. α,β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$$

① $\alpha,\ \beta$ ② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$ ③ $p,\ q$
④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$ ⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면
$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k\cdots$㉮
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)
$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

26. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ 이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore$ $k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

27. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, α^2, β^2을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$　② $x^2+5x-3=0$

③ $x^2-5x+1=0$　④ $x^2+6x-1=0$

⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$ $\cdots$㉢

㉡ − ㉢에서

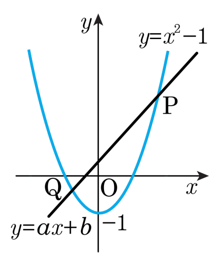
$\alpha\beta=1$ $\cdots$㉣

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore$ α^2, β^2을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

28. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$일 때, $2a + b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - 1 = a\left(1 + \sqrt{2}\right) + b$

$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2 = a + b$, $2 = a$

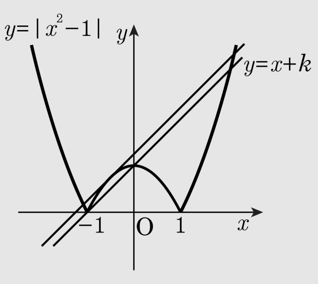
$\therefore a = 2$, $b = 0$

29. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \le k \le \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
④ $k < 1,\ k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면
$|x^2-1| = x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$
이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면
다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가
두 점에서 만나야하므로
$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

$D=1-4k+4>0$ $\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$ $\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

30. x 가 실수일 때, $x^2+4y^2-8x+16y-4=0$ 을 만족하는 y 의 최솟값을 구하여라.

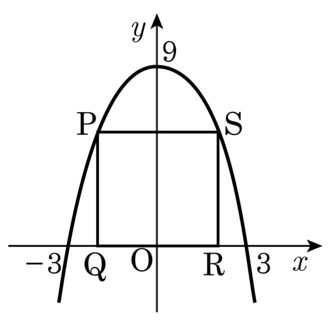
▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

준식을 x 에 관하여 정리하면
$x^2-8x+4y^2+16y-4=0$
이것은 x 에 대한 이차 방정식으로 볼 때
x 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$\therefore\ D/4=(-4)^2-(4y^2+16y-4)\geq 0$
$\rightarrow\ 4y^2+16y-20\leq 0$
$\rightarrow\ y^2+4y-5\leq 0$
$\rightarrow\ (y+5)(y-1)\leq 0$
$\therefore\ -5\leq y\leq 1$
$\therefore\ y$ 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -5

31. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$R(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $S(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

32. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$이므로
x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
$f(x)$라 하면 세 근의 합이 3이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$㉢
㉠$+$㉡$+$㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$

33. 사차방정식 $x^4+5x^3+ax^2+bx-5=0$이 $x=-1+\sqrt{2}$를 한 근으로 가질 때, $2a-b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$x=-1+\sqrt{2}$에서 $x+1=\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x^4+5x^3+ax^2+bx-5=(x^2+2x-1)(x^2+cx+5)$

$=x^4+(2+c)x^3+(4+2c)x^2+(10-c)x-5$

$\therefore$ $2+c=5$, $4+2c=a$, $10-c=b$

$\therefore$ $a=10$, $b=7$, $c=3$

34. 어느 4개의 정수 중 3개씩 더한 합이 각각 166, 199, 208, 216일 때, 네 수 중 가장 큰 수는?

① 65　② 73　③ 87　④ 91　⑤ 97

해설

네 정수를 $a \ge b \ge c \ge d$라 하자. 세 개씩 더한 합 중에서 $a+b+c=216$, $b+c+d=166$ 또 $a+b+d$ 와 $a+c+d$는 $a+b+d \ge a+c+d$이므로 $a+b+d=208$, $a+c+d=199$
네 식을 모두 더하면 $3(a+b+c+d)=166+199+208+216=789$
$\therefore\ a+b+c+d=263$
$a=263-166=97$

35. 3개의 수도꼭지 A, B, C로 물통에 물을 가득 채우려고 한다. 수도꼭지 3개를 모두 틀어 물통을 채우면 1시간 걸리고, A를 잠그고 B와 C를 틀면 2시간이 걸리며, B를 잠그고 A와 C를 틀면 1시간 30분이 걸린다. C를 잠그고 A와 B를 틀어 물통을 채울 때, 걸리는 시간은?

① $\frac{4}{3}$ 시간　② $\frac{5}{4}$ 시간　③ $\frac{6}{5}$ 시간
④ $\frac{7}{6}$ 시간　⑤ $\frac{8}{7}$ 시간

해설

모두 채웠을 때 1의 일을 한다고 하자
A가 채우는 속도 : a
B가 채우는 속도 : b
C가 채우는 속도 : c 라 하면,

$$\frac{1}{a+b+c}=1,\quad \frac{1}{b+c}=2,\quad \frac{1}{a+c}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\quad a+b+c=1,\ \ b+c=\frac{1}{2},\ \ a+c=\frac{2}{3}$$

세 식을 연립하면, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{6}$

$\therefore$ A와 B를 틀었을 때 걸리는 시간 : $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\dfrac{6}{5}$

36. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$가 있다.
$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999$, $Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$
두 삼차다항식을 $x^2 - 1$로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$의 값은?

① -3998　② -1999　③ 0
④ 1999　⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$로 놓으면
$H(x)$는 $x^2 - 1$로 나누어떨어지므로
$H(x) = 2x^3 + (a-c)x^2 + (b-d)x + 3998$
$= (x^2 - 1)(2x - 3998)$으로 놓을 수 있다.
($\because$ x^3의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$로 나눈 몫은 $2x - 3998$이다.)
$\therefore P(1999) - Q(1999)$
$= H(1999)$
$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$
$= 0$

37. 다항식 x^3-2x^2+mx-4를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$이고 몫 $Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이다. 이때, m의 값을 구하면?

① 6　② 4　③ 0　④ -1　⑤ -6

해설

$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+R$이라 하자.
$x=1$을 대입하면 $R=m-5$
$x^3-2x^2+mx-4=(x-1)Q(x)+m-5\cdots$①
$Q(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -5이므로
$Q(-1)=-5$
①식에 $x=-1$을 대입하면
$-1-2-m-4=-2Q(-1)+m-5$
$-2m=12$
$\therefore\ m=-6$

해설

조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -2 & m & -4 \\
 & & 1 & -1 & m-1 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & m-1 & \boxed{m-5} \\
 & & -1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{m+1} &
\end{array}
$$

$m+1=-5\ \therefore\ m=-6$

38. x 에 대한 다항식 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$ 가 모두 일차식 $x-\alpha$ 로 나누어 떨어질 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha)+2=0, \alpha f(\alpha)+2=0$

$f(\alpha)=-2, \alpha=1$

$\therefore f(1)=-2$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(1)=1+a+b+c=-2$

$\therefore a+b+c=-3$

39. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ 을 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a+b$　　② $b+c$

③ $a+c$　　④ $a^2+ab+bc+ca$

⑤ $a^2+2ab+b^2$

해설

(준 식) $=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$
$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2\}$
$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ca)$
$=3(b+c)(a^2+ab+bc+ca)$
$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$
$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

40. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because\ x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)

41. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\dfrac{D_1}{4}+\dfrac{D_2}{4}+\dfrac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

42. x의 방정식 $x^4 - 2(3k+1)x^2 + 7k^2 + 3k = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 0$　　② $k < 0$　　③ $k > 1$

④ $k < 1$　　⑤ $0 < k < 1$

해설

$x^2 = X$로 놓으면

$X^2 - 2(3k+1)X + 7k^2 + 3k = 0$

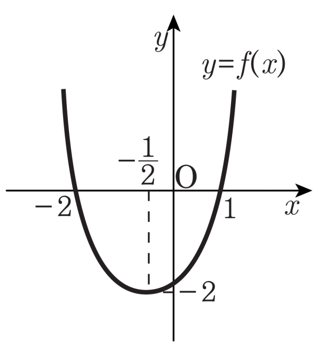
이것이 서로 다른 양의 실근을 가지면 되므로

$\frac{D}{4} = (3k+1)^2 - (7k^2+3k) > 0,$

$\alpha + \beta = 2(3k+1) > 0,\ \alpha\beta = 7k^2 + 3k > 0$

$\therefore\ k > 0$

43. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ 0　⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로
$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$

44. 정수 계수를 갖는 임의의 삼차식 $f(x)$에 대하여 α는 $f(x)+1=0$의 한 정수근이고 β는 $f(x)-1=0$의 한 정수근일 때, $\beta-\alpha$의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① -2　　② -1　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$f(\alpha)+1=0,\ f(\beta)-1=0$이므로 $f(\beta)-f(\alpha)=2$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a,b,c,d$는 정수$)$로 놓으면

$f(\beta)-f(\alpha)=a(\beta^3-\alpha^3)+b(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)=2$

$(\beta-\alpha)\left\{a(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)+b(\beta+\alpha)+c\right\}=2$

따라서 $\beta-\alpha$는 2의 약수이어야 한다.

$\therefore\ \beta-\alpha=\pm1$ 또는 ± 2

45. $x^{2n}+x^n+1$이 x^2+x+1로 나누어 떨어지는 두 자리의 양의 정수 n의 개수는?

① 45개　② 50개　③ 55개　④ 60개　⑤ 65개

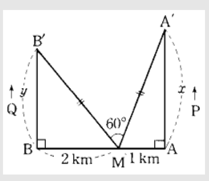
해설

$x^{2n}+x^n+1$이 x^2+x+1로
나누어 떨어지므로
$x^{2n}+x^n+1=(x^2+x+1)Q(x)\cdots\cdots$ ㉠
$x^2+x+1=0$의 한 허근을
ω라고 놓으면
$\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$이다.
㉠의 양변에 $x=\omega$를 대입하면
$\omega^{2n}+\omega^n+1=0$
(ⅰ) $n=3k$(k는 자연수)이면,
$\omega^n=\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1$
$\therefore\ \omega^{2n}+\omega^n+1=1+1+1\neq 0$
$\therefore\ n\neq 3k$
(ⅱ) $n=3k+1$(k는 자연수)이면,
$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k\cdot\omega=\omega$
$\therefore\ \omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^2+\omega+1=0$
(ⅲ) $n=3k+2$(k는 자연수)이면,
$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k\cdot\omega^2=\omega^2$
$\therefore\ \omega^{2n}+\omega^n+1$
$=(\omega^2)^2+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0$
(ⅱ), (ⅲ)에서 n은
3의 배수가 아닌 두 자리의 양의 정수이다.
따라서, n의 개수는 10에서 99까지
90개의 정수 가운데
3의 배수 30개를 제외하면
$90-30=60$(개)이다.

46. 어느 정해진 지점 M 에서 정동쪽으로 1 km 떨어진 지점을 A, 정서쪽으로 2 km 떨어진 지점을 B 라 할 때, A, B 지점에서 각각 P, Q 라는 사람이 모두 정북쪽으로 달려서 15 분 후에 각각 A′, B′ 지점에 도달했다. $\overline{A'M}$ 의 거리와 $\overline{B'M}$ 의 거리가 같고, 두 선분이 이루는 각이 60° 일 때, P, Q 의 시속은 각각 얼마인가?

① $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ km/h　② $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h, $6\sqrt{3}$ km/h
③ $8\sqrt{3}$ km/h, $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ km/h　④ $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ km/h, $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ km/h
⑤ $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ km/h, $8\sqrt{3}$ km/h

해설



$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ 의 거리를 각각 x, y 라 하고 피타고라스의 정리를 이용하면
$\sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉠
우선 A′, B′ 을 연결하면 $\triangle MA'B'$ 이 만들어지고, $\overline{MB'} = \overline{MA'}$ 이므로 $\angle MB'A' = \angle MA'B'$ 따라서 $\triangle MA'B'$ 은 정삼각형이다.
또, 점 B′ 에서 $\overline{A'A}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 A′B′H 가 만들어지므로 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{(x-y)^2+3^2} = \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+2^2} \cdots$ ㉡
㉠의 양변을 제곱하여 정리하면,
$x^2 - y^2 = 3 \cdots$ ㉠′
㉡에서 $\sqrt{(x-y)^2+9} = \sqrt{y^2+4}$,
$x^2 - 2xy = -5 \cdots$ ㉡′
㉠′ $\times 5 +$ ㉡′ $\times 3$ 을 하면
$8x^2 - 6xy - 5y^2 = 0$, $(2x+y)(4x-5y) = 0$
$\therefore\ x = \frac{5}{4}y\ (\because\ x > 0,\ y > 0) \cdots$ ㉢
㉢을 ㉠′ 에 대입하면
$\frac{25}{16}y^2 - y^2 = 3$, $y^2 = \frac{16}{3}$
$\therefore\ y = \frac{4}{\sqrt{3}} (\because\ y > 0)$ 이 값을 ㉢에 대입하면 $x = \frac{5}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{\sqrt{3}}$
따라서 P, Q 는 15분 $\left(\frac{1}{4}\text{시간}\right)$ 동안 각각 x, y 만큼 움직였으므로
P 의 시속은 $\frac{5}{\sqrt{3}} \times 4 = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ (km/h)
Q 의 시속은 $\frac{4}{\sqrt{3}} \times 4 = \frac{16\sqrt{3}}{3} =$ (km/h)

47. $2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$2x^2 + 2(y-3)x + y^2 - 4y + 5 = 0 \cdots ㉠$
이차방정식이 실근을 가져야 하므로
$D/4 = (y-3)^2 - 2(y^2 - 4y + 5) \geq 0$
$-y^2 + 2y - 1 \geq 0 \; y^2 - 2y + 1 \leq 0$
$(y-1)^2 \leq 0$
$\therefore \; y = 1 \; \Rightarrow$ ㉠에 대입
$2(x-1)^2 = 0$
$\therefore \; x = 1$
$\therefore \; x + y = 2$

48. $x,\ y,\ z$ 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x-ay+z=0 \ \cdots ㉠ \\ x-3by+2az=0 \ \cdots ㉡ \\ x+2by=0 \ \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 $x,\ y,\ z$ 가 동시에 0 이 아닌 해가 존재하도록 0 이 아닌 양의 정수 $a,\ b$ 의 값을 정하면, 그 때의 $x\ :\ y\ :\ z$ 의 값은?

① $-1\ :\ 1\ :\ 5$　② $-2\ :\ 1\ :\ 5$　③ $-3\ :\ 1\ :\ 5$
④ $-4\ :\ 1\ :\ 5$　⑤ $-5\ :\ 1\ :\ 5$

해설

$$\begin{cases} x-ay+z=0 \ \cdots ㉠ \\ x-3by+2az=0 \ \cdots ㉡ \\ x+2by=0 \ \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ $\times 2a-$ ㉡ 하면
$(2a-1)x-(2a^2-3b)y=0\ \cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 x 를 소거하면 $(2a^2+4ab-5b)y=0$
만일 $2a^2+4ab-5b\neq 0$ 이면 $y=0$
이것을 ㉢에 대입하면 $x=0$
또, ㉠에서 $z=0$ 이것은 $x=y=z=0$ 이 되어 조건에 부적당하다.
따라서 $2a^2+4ab-5b=0$
b 에 대해 풀면 $b(4a-5)=-2a^2$, $b=\dfrac{-2a^2}{4a-5}$ 에서 우변이 정수가 되도록 정리하면

$$\begin{aligned} 8b &= \frac{-16a^2}{4a-5} \\ &= \frac{(4a-5)(-4a-5)-25}{(4a-5)} \\ &= -4a-5-\frac{25}{4a-5} \end{aligned}$$

위의 식에서 $|4a-5|$ 는 25 의 약수가 되어야 하므로
$\therefore\ 4a-5=\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 25$ 0 이 아닌 a 의 양의 정수값은 $a=1$
$\therefore\ b=2$
㉠, ㉡에서 $x=-4y,\ z=5y$
$\therefore\ x\ :\ y\ :\ z=(-4)\ :\ 1\ :\ 5$

49. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \ge \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times 2+$②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3,\quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

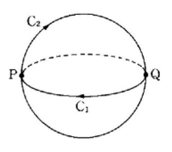
$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$

50. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 지름으로 하는 구가 있다. 두 마리의 개미가 50(cm/분), 70(cm/분)의 속력으로 각각 C_1, C_2의 방향으로 구면의 길을 따라 계속 움직인다. P 지점에서 동시에 출발하여 10분 후에 처음으로 Q 지점에서 만났을 때, 이 구의 반지름은? (단, C_1, C_2는 이 구의 대원이다.)



① $\dfrac{50}{\pi}$ cm ② $\dfrac{70}{\pi}$ cm ③ $\dfrac{90}{\pi}$ cm
④ $\dfrac{100}{\pi}$ cm ⑤ $\dfrac{120}{\pi}$ cm

해설

구의 반지름을 r이라 하면,
10분 동안 개미가 움직인 거리는
$50 \times 10 = (2m+1)\pi r$ ······㉠,
$70 \times 10 = (2n+1)\pi r$ ······㉡
($\because$ m, n은 자연수)
㉠, ㉡에 대하여 정리하면
$5n - 7m = 1$ ······㉢
㉢을 만족하는 최소의 자연수는
$m = 2$, $n = 3$일 때이다.
$\therefore$ $m = 2$를 ㉠에 대입하면
$500 = 5\pi r$
$\therefore$ $r = \dfrac{100}{\pi}$ cm