

1. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.

주어진 식에 $x = -1$, $x = 2$ 를 각각 대입하면,

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + n(-1) + 1 = 5 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2)^3 + m(2)^2 + n \cdot 2 + 1 = 3 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하면,

$$m = \frac{2}{3}, n = -\frac{13}{3}$$

$$\therefore m - n = 5$$

2. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 0$

② $-1 < a < 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$

⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

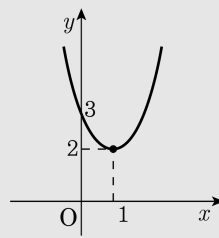
$$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

4. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x 의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의
함숫값의 범위를 구하면?

- ① $-2 < y < 3$ ② $-2 < y < 2$ ③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$ ⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과
같다.
 $f(0) = 3, f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위는 $2 < y < 3$



5. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
- ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
- ③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
- ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
- ⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	-4	3
	1	1	1	-3	
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1 \pm \sqrt{2}i$

6. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2y + 3z = 9 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ 3z + x = 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $y = 3$

▷ 정답 : $z = 1$

해설

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 에서 $x + 2y + 3z = 11 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉠}$ 에서 $3z = 3 \therefore z = 1$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x = 2$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉢}$ 에서 $y = 3$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ xy - y^2 = 6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x = p, y = q$ 또는 $x = r, y = s$ 이다. $p + q + r + s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & \cdots \textcircled{A} \\ xy - y^2 = 6 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x = 2y + 1 \cdots \cdots \textcircled{C}$

②을 ③에 대입하여 정리하면

$$y^2 + y - 6 = 0(y - 2)(y + 3) = 0$$

$$\therefore y = 2, -3$$

$y = 2, y = -3$ 을 ③에 대입하면

$$\text{각각 } x = 5, x = -5$$

$$\therefore x = 5, y = 2 \text{ 또는 } x = -5, y = -3$$

8. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3

② 6

③ 9

④ 14

⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

$$\therefore B = x^2 - 3x + 2$$

9. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, \quad b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
 $x=1$ 대입, $a=0$

㉡ 상수항 구하기
 $x=0$ 대입, $b=24$

10. 등식 $2x^2 - 3x - 1 = a(x-1)(x-2) + bx(x-1) + cx(x-2)$ 이 x 에 관한
항등식이 되도록 할 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

수치대입법을 이용한다.

$$x = 0 \text{ 대입, } a = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } b = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \text{ 대입, } c = 2$$

$$\therefore a + b + c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 2$$

11. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176 인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

- ① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$
- ② $\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$
- ③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- ④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- ⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a , 세로를 b , 높이를 c 라고 했을 때
 $(a^2 + b^2) + c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176 이므로
 $a + b + c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

12. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$ 로 나누면 3이 남고, x^2-1 로 나누면 떨어진다. 이 때, abc 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$$

$$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$$

$$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$$

$$x=-2 \text{ 대입, } -8+4a-2b+c=3$$

$$x=-1 \text{ 대입, } -1+a-b+c=0$$

$$x=1 \text{ 대입, } 1+a+b+c=0$$

세 식을 연립해서 구하면

$$a=3, b=-1, c=-3$$

$$\therefore abc=9$$

13. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{aligned}x^2+x &= A \text{로 치환하면} \\(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\&= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\&= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\&= (A-2)(A-12)+24 \\&= A^2-14A+48 = (A-6)(A-8) \\&= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\&= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\\therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8) = 10\end{aligned}$$

14. $N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

- ① 6개 ② 12개 ③ 20개 ④ 24개 ⑤ 64개

해설

$$\begin{aligned} N &= 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1 \\ &= (69 + 1)^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \end{aligned}$$

따라서 N 의 양의 약수는 개수는 $4^3 = 64$

15. 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$ 을 간단히 하여 $a + bi$ 의 꼴로 나타낼 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{-2} - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= (\sqrt{-3} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{-2}) - \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} \\ &= \sqrt{-6} \times \sqrt{-6} - \sqrt{-2} - \sqrt{-2} \\ &= -\sqrt{36} - \sqrt{2}i - \sqrt{2}i = -6 - 2\sqrt{2}i \\ \therefore ab &= 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

16. 방정식 $a^2 - (1 + x)a + 2x - 2 = 0$ 의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x = (x + 3)a - 10$ 의 해는?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$$a^2 - a - ax + 2x - 2 = 0, (a - 2)x = a^2 - a - 2$$

$$(a - 2)x = (a - 2)(a + 1)$$

i) $a \neq 2$ 일 때, $x = a + 1$

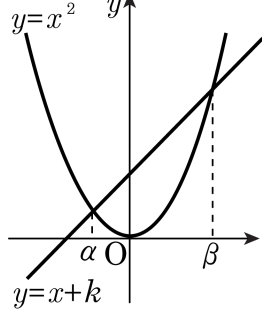
ii) $a = 2$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.

i), ii)에서 $a = 2$ 일 때이다.

따라서 방정식 $x = (x + 3)a - 10$ 에 $a = 2$ 를 대입하면

$$x = (x + 3) \cdot 2 - 10, x = 2x - 4 \therefore x = 4$$

17. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ $\alpha + \beta = 1$ ㉡ $k > 0$ ㉢ $\alpha\beta = -k$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.
 ㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 1 \cdots$ (참)
 ㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 + 4k > 0$ 에서 $k > -\frac{1}{4} \cdots$ (거짓)
 ㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha\beta = -k \cdots$ (참)
 따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

18. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \text{에서 } x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$

따라서, $x = 0, y - 1 = 0$ 이므로 $x = 0, y = 1$

$$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$$

19. $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 14$ 일 때, $x^5 + y^5$ 의 값을 구하면?

① 12

② 32

③ 52

④ 82

⑤ 102

해설

$$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y) \cdots (*)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$\therefore 14 = 8 - 6xy$$

$$\therefore xy = -1 \cdots \cdots ①$$

$$x^3 + y^3 = 14 \cdots \cdots ②$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 2(-1) = 6 \cdots \cdots ③$$

①, ②, ③을 (*)에 대입하면

$$x^5 + y^5 = 6 \times 14 - 2 = 82$$

20. $(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때,
 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$$(1 - x - x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$$

$x = 1$ 을 양변에 대입하면

$$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots \textcircled{1}$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면

$$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$$

$$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$$

21. 정수 n 에 대해 $z = i^n + i^{-n}, i = \sqrt{-1}$ 을 만족하는 z 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 4개보다 많다.

해설

정수 n 에 대하여 $i^n = i$ 또는 -1 또는 $-i$ 또는 1 ,

$i^n = i$ 이면 $i^{-n} = -i$, $i^n = -1$ 이면

$i^{-n} = -1$, $i^n = -i$ 이면

$i^{-n} = i$, $i^n = 1$ 이면

$i^{-n} = 1$

$\therefore i^n + i^{-n} = 0, -2, 0, 2$

$\therefore z$ 는 3개다.

22. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수)

- ㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15} = 1$

㉢ $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$ 일 때, $z\bar{z} = \frac{7}{3}$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
- ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ : $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ : $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$, $\alpha^3 = 1$
 $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{15}$
 $= 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3(1 + \alpha + \alpha^2) + \cdots + \alpha^{15} = \alpha^{15}$
 $= (\alpha^3)^5 = 1$ ($\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$)

㉢ : $\bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$, $\alpha + \bar{\alpha} = -1, \alpha\bar{\alpha} = 1$
 $z = \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha} + 3}{2\bar{\alpha} + 1}$
 $z\bar{z} = \frac{\alpha\bar{\alpha} + 3(\alpha + \bar{\alpha}) + 9}{4\alpha\bar{\alpha} + 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 1} = \frac{1 - 3 + 9}{4 - 2 + 1} = \frac{7}{3}$

해설

㉢ 이 성립함을 다음과 같이 직접 계산할 수 있다.

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

$\Rightarrow 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i, \alpha + 3 = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore \frac{\alpha + 3}{2\alpha + 1} = \frac{5 + \sqrt{3}i}{2\sqrt{3}i}$
 $= -\frac{5i - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$z \cdot \bar{z} = \frac{\sqrt{3 - 5i}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3 + 5i}}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{3}$

23. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

- ① $a = 3, b = -2$
 ② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$
- ③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$
 ④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$
- ⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

해설

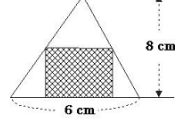
$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = -a \cdots \cdots$ ①
 $\alpha\beta = b \cdots \cdots$ ②
 $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이므로
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots$ ③
 $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots$ ④
 ③에서 $\alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$
 $\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$
 ④에서 $\alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$
 $\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$
 $\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$

24. x, y 에 관한 연립방정식
- $$\begin{cases} kx + (1 - k)y = 2k + 1 \\ akx + (k + 1)y = b + 4k \end{cases} \quad \text{가 } k \text{의 값에 관계없이 일정한 근을 갖도}$$
- 록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?
- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$kx + (1 - k)y = 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
$$akx + (k + 1)y = b + 4k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{1} \text{에서 } (x - y - 2)k + (y - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x - y - 2 = 0, y - 1 = 0$$
$$\therefore x = 3, y = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$
$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하여 정리하면}$$
$$(3a - 3)k + (1 - b) = 0$$
$$\therefore a = 1, b = 1$$
$$\therefore a + b = 2$$

25. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 6 cm , 높이가 8 cm 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 12 cm² 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.

다음 조건에 의해 $\alpha : 8 - \beta = 3 : 4$

$\Rightarrow 3\beta = 24 - 4\alpha$,

넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$

$\therefore \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, (\alpha - 3)^2 = 0$

$\therefore \alpha = 3$

26. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 6y + 5 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
이 때, x 가 실수이므로
 $\frac{D}{4} = (1-y)^2 - (2y^2 - 6y + 5) \geq 0$
 $y^2 - 4y + 4 \leq 0, (y-2)^2 \leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2 = 0$
 $\therefore y = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $\therefore x = 1 \therefore \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2$

해설

주어진 식을 정리하면
 $x^2 + 2(1-y)x + 2y^2 - 6y + 5 = 0$
 $x^2 + 2(1-y)x + (1-y)^2 + y^2 - 4y + 4 = 0$
 $\therefore (x+1-y)^2 + (y-2)^2 = 0$ x, y 가 실수이므로 $x+1-y = 0, y-2 = 0$
 $\therefore x = 1, y = 2$
 $\therefore \frac{y}{x} = 2$

27. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$
$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

(좌변)

$$= \{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$$
$$= (a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

따라서, $2a^2 + 2b^2 - 2c^2 = 0$ 이므로 $a^2 + b^2 = c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

28. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ㉠

빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ㉡

빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ㉢

빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ㉤

$a = b$ 인 이등변삼각형
- ㉥

$b = c$ 인 이등변삼각형

- ① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
- ② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
- ③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
- ④ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$$
에서
$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$
$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$
$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$
$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$
$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$
$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$
$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$
$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

29. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\alpha\beta < 0 \text{ 이므로 } \frac{\beta}{\alpha} < 0, \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 &= \frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 \left(\because \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}}\right) \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

해설

30. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. 3의 배수가 아닌 정수 n 에 대하여 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + (\textcircled{㉔})x + (\textcircled{㉕}) = 0$ 이다. ㉔와 ㉕에 알맞은 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

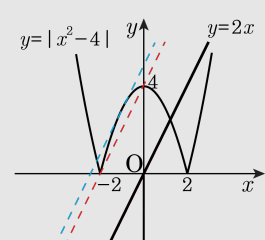
해설

α, β 는 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$
 $\therefore \alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$
한편, 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$
㉠ : $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \cdot \alpha + (\beta^3)^k \cdot \beta$
 $= \alpha + \beta = -1$
㉡ : $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,
 $\alpha^n + \beta^n = (\alpha^3)^k \alpha^2 + (\beta^3)^k \beta^2$
 $= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= 1 - 2 = -1$
㉠, ㉡에서 n 이 3의 배수가 아니면
 $\alpha^n + \beta^n = -1, \alpha^n \beta^n = (\alpha\beta)^n = 1$
따라서 α^n, β^n 을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $x^2 + x + 1 = 0 \therefore \textcircled{㉔} = 1, \textcircled{㉕} = 1$

- 31.** x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4| = 2x + m$ 이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m 의 값 또는 m 의 값의 범위는?
- ① $-4 < m < 4$ ② $m = -4$
- ③ $m = 4$ 또는 $m = 5$ ④ $4 < m < 5$
- ⑤ $m > 5$

해설

$y = |x^2 - 4|$ 와 $y = 2x + m$ 을 그래프로 나타내면


$$\textcircled{1} \textcircled{2}$$
$$y=2x+m$$

서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

- ① $-x^2 + 4 = y$ 와 $2x + m = y$ 이 접하는 경우

$$-x^2 + 4 = 2x + m$$

$$x^2 + 2x + m - 4 = 0$$

$$\frac{D}{-} = 1 - m + 4 = 0$$

$$\frac{-}{4} = 1 - m + 4 = 0$$

$$\therefore m = 5$$

- ② $y = 2x + m$ 이 $(-2, 0)$ 을 지나는 경우

$$0 = -4 + m$$

$$\therefore m = 4$$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$\cdot \quad 4 \leq m \leq 5$

32. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x + 1)^2 - 1$ 이므로
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
 $t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

33. $x^4 - bx - 3 = 0$ 의 네 근을 a, b, c, d 라고 할 때, $\frac{a+b+c}{d^2}, \frac{a+b+d}{c^2}, \frac{a+c+d}{b^2}, \frac{b+c+d}{a^2}$ 를 네 근으로 하는 방정식은?

- ① $3x^4 + bx + 2 = 0$

② $3x^4 - bx + 1 = 0$
- ③ $3x^4 + bx^3 - 1 = 0$

④ $3x^4 - bx^3 - 1 = 0$
- ⑤ $3x^4 + bx^3 - 2 = 0$

해설

근과 계수의 관계에서 $x^4 - bx - 3 = 0$ 의 네 근이 a, b, c, d 이므로 $a + b + c + d = 0$

따라서,

$$\frac{a+b+c}{d^2} = \frac{a+b+c+d-d}{d^2} = -\frac{1}{d}$$

마찬가지로

$$\frac{a+b+d}{c^2} = -\frac{1}{c},$$

$$\frac{a+c+d}{b^2} = -\frac{1}{b},$$

$$\frac{b+c+d}{a^2} = -\frac{1}{a}$$

$f(x) = 0$ 의 근이 a, b, c, d 이면 $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}, -\frac{1}{d}$ 을 근으로 하는 방정식은 $f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ 이다.

$$\therefore \left(-\frac{1}{x}\right)^4 - b\left(-\frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$$

$$1 + bx^3 - 3x^4 = 0$$

$$\therefore 3x^4 - bx^3 - 1 = 0$$