1. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3 ② 0 ③ 2

④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

3. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $y = -1$

▷ 정답 : $z = 2$

해설

$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에서

$3x + 2y = 7 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5}$ 에서

$5x - 2z = 11 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$x + 2y + 3z = 7 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠ − ㉢을 하면 $2x - 3z = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉡ $\times 3 -$ ㉣ $\times 2$를 하면 $11x = 33$

$\therefore\ x = 3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y = -1,\ z = 2$

4. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2, b=3$

$\therefore ab=-6$

5. $x-y=1$을 만족하는 임의의 실수 x, y에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$y=x-1$을 준식에 대입하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(a+b+c)x^2-(b+2c)x+c-1=0$
x에 대한 항등식이므로
$a+b+c=0,\ b+2c=0,\ c-1=0$
$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=1$
$\therefore\ a+b+c=0$

6. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$ ② $k \leq 1$ ③ $k < 3$

④ $k \leq 3$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore \ k \leq 3$

7. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, (가) ~ (마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.
> $ax^3+bx^2+cx+d=a(\text{(가)})(x-\beta)(x-\gamma)$
> 이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면
> $ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\text{(나)})x^2+a(\text{(다)})x-a(\text{(라)})$가 되는데
> 이것은 x에 대한 ((마))이다.
> 따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로
> $b=-a(\text{(나)})$, $c=a(\text{(다)})$, $d=-a(\text{(라)})$
> 각 식의 양변을 a로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면
> $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$
> $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

① (가) $x+a$ ② (나) $\alpha+\beta+\gamma$

③ (다) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ ④ (라) $\alpha\beta\gamma$

⑤ (마) 항등식

해설

(가) $x-\alpha$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$의 값을 a, b라 할 때, $a - b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \ (3x - y)(2x - 3y) = 0$
$\therefore \ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7 \ x = 1(x > 0), \quad y = 3$
$\therefore \ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28, \ \ y^2 = 4, \ y = 2(y > 0), \ x = 3$
$\therefore \ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore \ a - b = 1$

9. $a(a+1)=1$일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}=\dfrac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$

$=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$

$=\dfrac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a$ 대입

$=\dfrac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$

10. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+2i)z+5(1-\bar{z}i)=0$을 만족시키는 복소수 z는?

① $1+3i$　　② $1-3i$　　③ $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
④ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$　　⑤ $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
따라서, 준식은 $(1+2i)(a+bi)+5\{1-(a-bi)i\}=0$
$\therefore\ a-7b+5+(b-3a)i=0$
그런데, $a,\ b$가 실수이므로
$a-7b+5=0,\ b-3a=0$
이들을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$
$\therefore\ z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x-a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2$
따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0 을 가진다.

12. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$

$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면

$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고

준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0 이어야 한다.

$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$

$2 + k = 0$

$\therefore\ k = -2$

13. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답: $\underline{\quad\quad\quad}$ $\underline{\mathrm{cm}^2}$

▷ 정답: 100 $\underline{\mathrm{cm}^2}$

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 $r$cm 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$
$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 $100\mathrm{m}^2$ 이다.