

1. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3

② 0

③ 2

④ 4

⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에 의해

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입

$$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$$

계수가 유리수이므로

$$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$$

$$a = 4, b = 1$$

$$\therefore ab = 4$$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

▷ 정답 : $y = -1$

▷ 정답 : $z = 2$

해설

$$\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{3} \text{ 에서}$$

$$3x + 2y = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z+3}{5} \text{ 에서}$$

$$5x - 2z = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x + 2y + 3z = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \text{ 을 하면 } 2x - 3z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉡} \times 3 - \textcircled{㉣} \times 2 \text{ 를 하면 } 11x = 33$$

$$\therefore x = 3 \text{ 이것을 } \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에 대입하면}$$

$$y = -1, z = 2$$

4. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

5. $x-y=1$ 을 만족하는 임의의 실수 x, y 에 대하여 $ax^2+bxy+cy^2-1=0$ 이 항상 성립할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$y = x - 1$ 을 준식에 대입하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (b+2c)x + c - 1 = 0$

x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, b+2c=0, c-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=0$$

6. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$ 이 실근을 갖도록 실수 k 의 범위를 정하면?

① $k < 1$

② $k \leq 1$

③ $k < 3$

④ $k \leq 3$

⑤ $1 < k < 3$

해설

$$3x^2 + 6x + k = 0,$$

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$$

$$3k \leq 9 \quad \therefore k \leq 3$$

7. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, (가) ~ (매)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(\text{가})(x - \beta)(x - \gamma)$$

이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(\text{나})x^2 + a(\text{다})x - a(\text{라}) \text{가 되는데}$$

이것은 x 에 대한 (매)이다.

따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로

$$b = -a(\text{나}), c = a(\text{다}), d = -a(\text{라})$$

각 식의 양변을 a 로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

① (가) $x + a$

② (나) $\alpha + \beta + \gamma$

③ (다) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

④ (라) $\alpha\beta\gamma$

⑤ (매) 항등식

해설

(가) $x - \alpha$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉡ 식 $+ 2 \times$ ㉠ 식에 대입하면

$$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$$

$$\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$$

㉠: $3x = y$ 를 ㉠ 식에 대입하면

$$7x^2 = 7 \quad x = 1 (x > 0), \quad y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

㉠: $2x = 3y$ 를 $4 \times$ ㉠ 식에 대입하면

$$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2 (y > 0), \quad x = 3$$

$$\therefore x + y = 5$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 5, b = 4$$

$$\therefore a - b = 1$$

9. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2} &= \frac{(a^3 + 1)(a^3 - 1)}{a^2(a^2 - 1)} \\&= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)}{a^2(a + 1)(a - 1)} \\&= \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}{a^2} \leftarrow a^2 = 1 - a \text{ 대입} \\&= \frac{2(1 - a) \times 2}{1 - a} = 4\end{aligned}$$

10. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, $(1 + 2i)z + 5(1 - \bar{z}i) = 0$ 을 만족시키는 복소수 z 는?

① $1 + 3i$

② $1 - 3i$

③ $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

④ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

⑤ $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

따라서, 준식은 $(1 + 2i)(a + bi) + 5\{1 - (a - bi)i\} = 0$

$$\therefore a - 7b + 5 + (b - 3a)i = 0$$

그런데, a, b 가 실수이므로

$$a - 7b + 5 = 0, b - 3a = 0$$

이들을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

$$\therefore z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$$

11. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$$

이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.

$$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$$

따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0을 가진다.

12. x, y 에 대한 이차식 $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 x, y 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3

② -2

③ -1

④ 1

⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면 근의 공식에 의하여

$$\begin{aligned}x &= -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)} \\&= -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이면

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \text{ 이고}$$

준식이 x, y 의 일차식으로 인수분해되므로

x 의 두 근 $\textcircled{7}$ 에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.

따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.

$$\therefore D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

$$2+k=0$$

$$\therefore k = -2$$

13. 둘레의 길이가 40 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답 : cm²

▷ 정답 : 100 cm²

해설

부채꼴의 반지름의 길이를 r cm 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times r \times (40 - 2r) = r(20 - r)$$

$$= -r^2 + 20r = -(r - 10)^2 + 100$$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.

