

1. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x + y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \textcircled{1}, \quad a^2 - b = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{5}{2}, \quad b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

2. 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a \geq 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 - a) > 0$$

$$1 - 2 + a > 0$$

$$\therefore a > 1$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

상수항을 소거하기 위해 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 를 계산하여 정리하면

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0, (x + 2y)(x - y) = 0$$

$\therefore x = y, x = -2y$ 각각을 $\textcircled{1}$ 식에 대입하면

i) $x = y$ 일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0, -2 = 0$ 불능

$$\text{ii) } x = -2y \text{ 일 때 } 4y^2 + 2y^2 - 2 = 0 \begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x = \alpha, y = \beta \text{ 라 할 때, } \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

4. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A \otimes B = \frac{B}{B-A}$ 라 할 때, $(x \otimes x^2) + (x^2 - x) \otimes (x - 1)$ 을 간단히 하면? (단, $x \neq 0, x \neq 1$ 인 실수)

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(x \otimes x^2) = \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$(x^2 - x) \otimes (x - 1) = \frac{x-1}{(x-1) - (x^2 - x)}$$

$$= \frac{x-1}{x-1-x^2+x}$$

$$= \frac{(x-1)}{-(x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)}{-(x-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{x-1}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

5. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

6. $x = -1 + i$ 일 때, $x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$ 의 값을 구하면?

① $-1 + i$

② $-i$

③ i

④ -1

⑤ 1

해설

$$x = i - 1 \Rightarrow x + 1 = i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x + 2 = 0$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 1$$

$$= x^2(x^2 + 2x + 2) - x^2 - x - 1$$

$$= -x^2 - x - 1 \quad (\because x^2 + 2x + 2 = 0)$$

$$= -(-2x - 2) - x - 1$$

$$= x + 1 = i$$

7. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

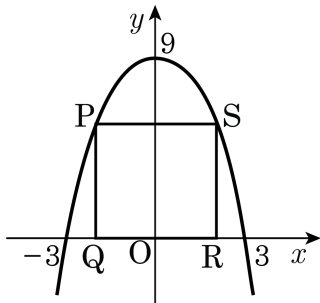
$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

8. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면

$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,

$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$

$R(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $S(a, -a^2 + 9)$

직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$

둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$

따라서 둘레의 최댓값은 20