1. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 0

해설

다른 한 근은 복소수의 켈레근인 $1 + i$ 이므로

두 근의 합: $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore a = -2$

두 근의 곱: $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore b = 2$

$\therefore a + b = -2 + 2 = 0$

2. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

$$\text{가장 작은 근 } a = -\sqrt{6}, \text{ 가장 큰 근 } b = \sqrt{6}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

3. 다항식 $2x^2 + 5ax - a^2$ 을 다항식 $P(x)$ 로 나눈 몫이 $x + 3a$, 나머지가 $2a^2$ 일 때, 다항식 $(x + a)P(x)$ 를 나타낸 것은?

① $x^2 + 2ax - 2a^2$

② $x^2 - a^2$

③ $2x^2 + 3ax + a^2$

④ $2x^2 - 3ax - a^2$

⑤ $2x^2 + ax - a^2$

해설

$2x^2 + 5ax - a^2 = P(x)(x + 3a) + 2a^2$ 이므로

$P(x)(x + 3a) = 2x^2 + 5ax - 3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$ 는 $2x^2 + 5ax - 3a^2$ 을 $x + 3a$ 로 나눈 몫이므로

$P(x) = 2x - a$

$\therefore (x + a)P(x) = (x + a)(2x - a)$
 $= 2x^2 + ax - a^2$

4. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x 에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a = 2$

해설

$$\frac{2x+3a}{4x+1} = k \text{ (일정값} = k \text{)} \text{라 놓으면 } 2x+3a = k(4x+1) \text{에서}$$

$$(2-4k)x + 3a - k = 0$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로,

$$2-4k = 0, 3a - k = 0$$

$$k = \frac{1}{2} \text{이므로 } 3a = k \text{에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore 12a = 2$$

5. 임의의 실수 x, y 에 대하여, $(x+y)a^2 + (x-y)b = 4x + y$ 가 성립할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$

② $\frac{15}{4}$

③ $\frac{17}{4}$

④ $\frac{19}{4}$

⑤ $\frac{21}{4}$

해설

$$(a^2 + b)x + (a^2 - b)y = 4x + y$$

$$a^2 + b = 4 \cdots \text{①}, a^2 - b = 1 \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②에서 } a^2 = \frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{19}{4}$$

6. 다항식 $(x+2)f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나눈 나머지가 -3 이다. 이때 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나눈 나머지는?

① $-4x + 7$

② $-4x - 3$

③ $2x + 3$

④ $2x - 3$

⑤ $3x - 1$

해설

나머지정리에 의하여

$(x+2)f(x)$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1) = 9 \text{이므로 } f(1) = 3 \cdots \textcircled{7}$$

$(2x-3)f(3x-7)$ 에 $x=3$ 을 대입하면

$$3f(2) = -3 \text{이므로 } f(2) = -1 \cdots \textcircled{8}$$

$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$ 에 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 대입하면

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$$

이므로 $a = -4$, $b = 7$

7. 이차방정식 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 최대값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$$D' = 1^2 - (k - 3) > 0$$

$$\therefore k < 4$$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because k$ 는 정수)

8. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4$, $\alpha\beta\gamma = -3$ 이므로

$$(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

$$= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma$$

$$= 1 - 2 + 4 + 3 = 6$$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

㉡ 식 + 2×㉠식에 대입하면

$$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \quad (3x - y)(2x - 3y) = 0$$

$$\therefore 3x = y \text{ or } 2x = 3y$$

㉠: $3x = y$ 를 ㉠식에 대입하면

$$7x^2 = 7x = 1(x > 0), \quad y = 3$$

$$\therefore x + y = 4$$

㉡: $2x = 3y$ 를 4×㉠식에 대입하면

$$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2(y > 0), \quad x = 3$$

$$\therefore x + y = 5$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 5, b = 4$$

$$\therefore a - b = 1$$

10. 학교운동장에 길이가 70m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10m 이하이다.)

- ① 16m ② 17m ③ 18m ④ 19m ⑤ 20m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$3x + 5y = 70$$

$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10, y = 8$

$$\therefore \text{가로} + \text{세로} = 18$$

11. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad a = 2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5, \quad b^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

12. $z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i}$ 일 때 $z^5 + 3z$ 를 간단히 하면?

① $1 + \sqrt{3}i$

② $2 + \sqrt{3}i$

③ $3 + \sqrt{3}i$

④ $2 + 2\sqrt{3}i$

⑤ $3 + 3\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{2}{1 - \sqrt{3}i} \text{ 에서 } z^2 - z + 1 = 0 \therefore z^3 = -1$$

$$z^5 + 3z = -z^2 + 3z = -(z - 1) + 3z = 1 + 2z$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로 } 1 + 2z = 2 + \sqrt{3}i$$

13. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$$

이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$ 을 가진다.

$$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$$

따라서 m 은 $a = 1$ 일 때, 최댓값 0을 가진다.

14. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a

② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$

④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 2a(8a^3 - 125b^3) \\ &= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\} \\ &= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)\end{aligned}$$

15. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.

1kg에 p 원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p 의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하할 수 있다.)

① 2600원

② 2670원

③ 2700원

④ 2750원

⑤ 2800원

해설

3000원에서 $10x$ 원 가격을 내렸을 때

1kg의 판매가격은 $3000 - 10x$

1일 판매량은 $100 + 3x$

따라서 하루의 이익 P 는

$$P = (3000 - 10x)(100 + 3x) - 2000(100 + 3x)$$

$$= (1000 - 10x)(100 + 3x)$$

$$= -30x^2 + 2000x + 100000$$

$$= -30 \left(x^2 - \frac{200}{3}x \right) + 100000$$

$$= -30 \left(x - \frac{100}{3} \right)^2 + \frac{400000}{3}$$

x 가 문제에서 정수이므로 $x = 33$ 일 때 최대이다.

따라서 $3000 - 330 = 2670$ (원)