1. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(m+a-1)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4}=0$을 만족한다.

$\frac{D'}{4}=(m+a-1)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m(2a-2)+(1-2a+2b)=0$

m에 대한 항등식이므로

$2a-2=0,\ 1-2a+2b=0$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}$

2. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

(i) 이차방정식이므로 $m^2-1 \neq 0$

$\therefore\ m \neq 1, -1$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1, -2$

$\therefore$(i)과 (ii)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

3. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

4. $3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$을 인수분해 하면?

① $(x+y+1)(3x+y-3)$
② $(x-y+1)(3x-y-3)$
③ $(3x+y+1)(x-y-3)$
④ $(x+y+1)(3x-y-3)$
⑤ $(x-y-1)(3x-y-3)$

해설

$3x^2 + 2xy - y^2 - 4y - 3$
$= \{3x - (y+3)\}(x+y+1)$
$= (x+y+1)(3x-y-3)$

5. x에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2-4x+2=0$에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a=1$일 때, 중근을 갖는다.

㉡ $a>1$일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

㉢ $a<1$일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.
서로 다른 두 실근을 가질 때
$\frac{D}{4}=4-2(a+1)=2-2a>0$
$\therefore a<1$
따라서 $a<-1$ 또는 $-1<a<1$일 때,
서로 다른 두 실근을 갖는다.
중근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a=0$
$\therefore a=1$
따라서, $a=1$일 때, 중근을 갖는다.
서로 다른 두 허근을 가질 때
$\frac{D}{4}=2-2a<0$
$\therefore a>1$
따라서 $a>1$일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.

6. 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-4x+1=0$ ② $x^2+4x+1=0$
③ $x^2-3x+1=0$ ④ $x^2+3x+1=0$
⑤ $x^2-2x+1=0$

해설

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$

$x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0$

$x^2-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}x+1=0$

$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\cdot(-2)}{-2}=-4$

$\therefore\ x^2+4x+1=0$

7. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

8. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$　　② $1 \le k < 2$　　③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$　　⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

9. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠
$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡
㉡ 식+2×㉠식에 대입하면
$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0$ $(3x-y)(2x-3y) = 0$
$\therefore\ 3x = y$ *or* $2x = 3y$
㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면
$7x^2 = 7$ $x = 1(x > 0)$, $\quad y = 3$
$\therefore\ x + y = 4$
㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면
$7y^2 = 28$, $\ y^2 = 4$, $y = 2(y > 0)$, $x = 3$
$\therefore\ x + y = 5$
$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$
$\therefore\ a - b = 1$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy + 3y^2 = 1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2 - 11xy - 26y^2 = 0,\ (x+2y)(x-13y) = 0$
$x + 2y = 0 \cdots\cdots$ ㉢
$x - 13y = 0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2 = 1$
$\therefore\ y = \pm 1,\ x = \mp 2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2 = 1$
$\therefore\ y = \pm\frac{1}{4},\ x = \pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x + y = -1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

11. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

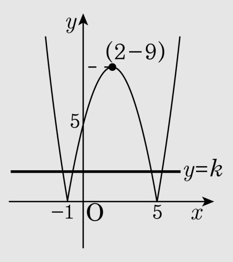
① $0<k<3$　　② $0<k<5$　　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　　⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

12. x에 대한 방정식 $|x^2-4|=2x+m$이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m의 값 또는 m의 값의 범위는?

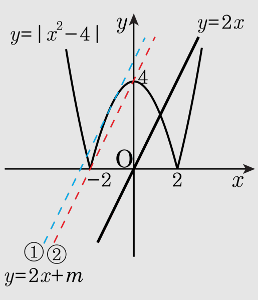
① $-4<m<4$　② $m=-4$

③ $m=4$ 또는 $m=5$　④ $4<m<5$

⑤ $m>5$

해설

$y=|x^2-4|$와 $y=2x+m$을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2+4=y$와 $2x+m=y$이 접하는 경우

$-x^2+4=2x+m$

$x^2+2x+m-4=0$

$\frac{D}{4}=1-m+4=0$

$\therefore\ m=5$

② $y=2x+m$이 $(-2,\ 0)$을 지나는 경우

$0=-4+m$

$\therefore\ m=4$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$\therefore\ 4<m<5$

13. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x-1)^2 + (y+3)^2 + 5$
이 때, x, y 가 실수이므로
$(x-1)^2 \geq 0$, $(y+3)^2 \geq 0$
$\therefore\ 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$
따라서 구하는 최솟값은 5 이다.

14. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65　　② 66　　③ 67　　④ 68　　⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1 - \alpha)$를 곱하면
$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0$,
$1 - \alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n + 1 = 6k(k = 1, 2, 3, \ldots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.

15. 연립방정식 $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$ 의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

Ⅰ. 이 방정식은 a의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
Ⅱ. $a=-2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
Ⅲ. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a는 꼭 한 개 있다.
Ⅳ. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

① Ⅱ ② Ⅱ, Ⅲ ③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

세 방정식을 더하면 $(a+2)(x+y+z)=3$
ⅰ) $a=-2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 Ⅰ, Ⅱ 는 옳지 않다.
ⅱ) $a \neq -2$ 이면 $x+y+z=\frac{3}{a+2}$ ……㉠
㉠에서 첫 번째 식을 빼면 $(a-1)x=\frac{a-1}{a+2}$
따라서 $a=1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
$a \neq 1$ 이면 $x=\frac{1}{a+2}$
같은 방법으로 $y=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{1}{a+2}$
따라서 Ⅲ, Ⅳ 는 옳다.

16. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$

$\alpha^2+3\alpha+p=0$

$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$

$\alpha=1$ or $p=3$

$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$

$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$

$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

17. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는 $a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

18. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수의 개수를 구하면? (단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ (단, $a,\ b$는 실수)라 하면
$(a+bi)^2 = a - bi$
$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$
$a^2 - b^2 = a \quad \cdots\cdots$ ㉠
$2ab = -b \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉡에서 $b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$
(i) $b = 0$ 일 때 ㉠에서 $a^2 = a$
$\therefore\ a = 0$ 또는 $a = 1$
(ii) $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 ㉠에서 $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$
$\therefore\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
따라서, $z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$