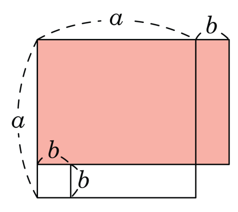
1. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

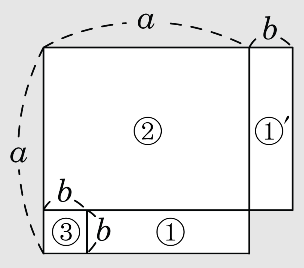
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) =$ ①′ + ②

①′ = ①이므로

$(a+b)(a-b) =$ ① + ② $= a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나머지가 3이다. 이 때, 상수 $m-n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

나머지 정리를 이용한다.
주어진 식에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면,
$(-1)^3+m(-1)^2+n(-1)+1=5\cdots$ ㉠
$(2)^3+m(2)^2+n\cdot 2+1=3\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면,
$m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$
$\therefore\ m-n=5$

3. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a-b+c$ ② $c-a$ ③ $b+c$

④ $a-b$ ⑤ $c-b+a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2-b^2) + (a^2-b^2)c \\ &= (a-b)(a+b)(a+c) \end{aligned}$$

4. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

5. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore\ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

6. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

7. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근이 아닌 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$

$(x-1)(x^3+2x^2-5x-6)=0$

$(x-1)(x-2)(x^2+4x+3)=0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-3,-1,1$ 또는 2

8. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

9. 삼차방정식 $2x^3 - 7x^2 + 11x + 13 = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha + \beta + \gamma$
(나) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \leq x + 4 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

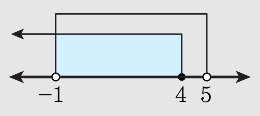
㉠ $2x \leq x + 4$,

$\therefore x \leq 4$

㉡ $x^2 - 4x - 5 < 0$

$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0$

$\therefore -1 < x < 5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1 < x \leq 4$

$\therefore x = 0, 1, 2, 3, 4$ 총 5 개

11. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$　② $2x$　③ $3x+2$
④ $4x$　⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1$, $R(x)=3x+1$
$\therefore$ $Q(x)+R(x)=4x$

12. $(1+2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5+7x^6)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는?

① 0　② 2　③ -2　④ 4　⑤ -4

해설

x^3 을 만들 수 있는 것은
(3차항)×(상수항), (2차항) ×(1차항)
2쌍씩이다.
$4\times1\times2+(-3)\times2\times2 \ = 8+(-12) = -4$

13. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.
즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$
$\therefore\ a=6$

14. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

15. 0 이 아닌 실수 a 가 등식 $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{a+5}{a}}$ 를 만족할 때, $|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2}$ 을 간단히 하면?

① $-2a-5$　② 5　③ $2a+5$
④ -5　⑤ $2a$

해설

$a+5 \geq 0,\ a < 0$, $-5 \leq a < 0$

$|\,a\,| + \sqrt{(a+5)^2} = -(a) + (a+5) = 5$

16. 방정식 $|x|+|x-1|=9$의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x|+|x-1|=9$에서

ⅰ) $x<0$일 때,

$-x-x+1=9$

$\therefore\ x=-4$

ⅱ) $0\le x<1$일 때,

$x-x+1=9$(성립하지 않음)

ⅲ) $x\ge 1$일 때,

$x+x-1=9$

$\therefore\ x=5$

따라서 모든 근의 곱은

$(-4)\times 5=-20$

17. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ii) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

18. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

19. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore\ M-m=12$

20. x에 대한 삼차방정식 $x^3+2x^2+(k+1)x+k=0$의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k$　② $1 \le k < 2$　③ $k > 0$

④ $-1 < k \le \frac{1}{4}$　⑤ $k \le \frac{1}{4}$

해설

방정식 $x^3+2x^2+(k+1)+k=0$을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$(x+1)(x^2+x+k)=0$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식 $x^2+x+k=0$이 실근을 가져야 하므로

$D=1^2-4k \ge 0$

$\therefore\ k \le \frac{1}{4}$

21. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m<k<n$이다. 이 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하려면
판별식 $D<0$이다.
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)<0$
$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$
$-3<k<2$
$\therefore m=-3$, $n=2$
$\therefore$ $m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$

22. a가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2+ax+a=0,\ x^2-2ax+2a+3=0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a의 범위는 ?

① $-1<a<4$

② $-1<a<0$ 또는 $3<a<4$

③ $-1\le a\le 4$

④ $-1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

⑤ $3\le x\le 4$

해설

$x^2+ax+a=0 \quad \cdots ㉠$

$x^2-2ax+2a+3=0 \cdots ㉡$

㉠에서 허근을 가지려면

$D=a^2-4a<0$

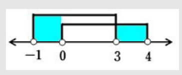
$\therefore\ 0<a<4$

㉡에서 허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=a^2-2a-3<0$

$(a+1)(a-3)<0$

$\therefore\ -1<a<3$

한쪽만이 허근을 가지려면, 

$\therefore\ -1<a\le 0$ 또는 $3\le a<4$

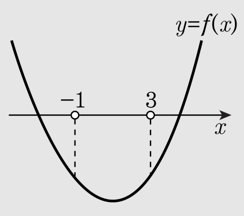
23. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

24. $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$을 동시에 만족시키는 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=1$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① 11　　② 8　　③ 7　　④ 6　　⑤ 4

해설

(i) $x+y+z=0,\ 2x-y-7z=3$에서
$x,\ y$를 z에 대하여 나타내면
$x=2z+1,\ y=-3z-1$

(ii) $x=2z+1,\ y=-3z-1$을 $ax^2+by^2+cz^2=1$에 대입하여
정리하면
$(4a+9b+c)z^2+2(2a+3b)z+(a+b-1)=0$
$\therefore\ 4a+9b+c=0,\ 2a+3b=0,\ a+b-1=0$
$\therefore\ a=3,\ b=-2,\ c=6$
$\therefore\ a+b+c=7$

25. $a+b+c=0$일 때, $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ac}+\dfrac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$(\text{준식})=\dfrac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$=\dfrac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$\therefore\ \dfrac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\dfrac{3abc}{abc}=3$

26. 복소수 $\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 에 대하여 $\alpha^* = b + ai$로 나타낸다.$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4 + 3i$　② $3 + 3i$　③ $2 + 3i$
④ $1 + 3i$　⑤ $-1 + 3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai)\\ &= ab + a^2 i + b^2 i - ab = (a^2+b^2)i\end{aligned}$$

$\alpha = \dfrac{4+3i}{5}$ 이므로 $\alpha\alpha^* = \left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right\} i = i$

$$\begin{aligned}\therefore\ 5\alpha^5(a^*)^4 &= 5\alpha(\alpha \cdot a^*)^4\\ &= 5 \cdot \frac{4+3i}{5} \cdot i^4\\ &= 4 + 3i\end{aligned}$$

27. 두 함수 $f(x) = |x-2|-5$, $g(x) = x^2+6x+8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2|-5 = t$ 로 놓으면

$y = g(f(x)) = g(t) = t^2+6t+8 = (t+3)^2-1$

그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로

y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M = 3,\ m = -1$

$\therefore M + m = 2$

28. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α, β, γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3$,
$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2$,
$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면
$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$
$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot 2\cdot 1=6$

29. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$ 이 실근을 가질 때, 실수 a 의 범위를 구하면?

① $a \geq -\dfrac{3}{4}$　② $a > -\dfrac{1}{2}$　③ $-1 < a < 1$
④ $a \leq \dfrac{2}{3}$　⑤ $a < 2$

해설

$\begin{cases} x+y=a+2 \\ xy=\dfrac{a^2+1}{4} \end{cases}$

의 해 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은 $t^2-(a+2)t+\dfrac{a^2+1}{4}=0$

위의 방정식이 실근을 가지려면

$D=(a+2)^2-4\times\dfrac{a^2+1}{4}\geq 0$

$4a+3\geq 0$

$\therefore\ a\geq -\dfrac{3}{4}$

30. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은 ?

① -7　② -5　③ 5　④ 7　⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면
(ⅰ) $x \geq -1$ 일 때
$5-x>2x+2$, $x<1$ $\quad \therefore -1 \leq x < 1$
(ⅱ) $x<-1$ 일 때
$5-x>-2x-2$, $x>-7$ $\quad \therefore -7<x<-1$
(ⅰ), (ⅱ) 에 따라 $-7<x<1$
$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고
$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-6 \quad \therefore \ a+b=-7$

31. 세 변의 길이가 x, y, z인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore$ $x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because$ $x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 x, y, z는 $x+y\neq z$)

32. x의 이차방정식 $x^2+(k-2)x+2+k^2+k=0$의 두 실근을 α,β라 하고 $(1-\alpha)(1-\beta)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M,m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ -1　④ 2　⑤ -2

해설

$\alpha+\beta=2-k,\ \alpha\beta=2+k^2+k$

$\therefore\ (1-\alpha)(1-\beta)=1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2$ ············ ㉠

실근 조건에 의해

$D=(k-2)^2-4(2+k+k^2)\geq 0$

$3k^2+8k+4\leq 0 \therefore\ (3k+2)(k+2)\leq 0$

$\therefore\ -2\leq k\leq -\dfrac{2}{3}$ ······ ㉡

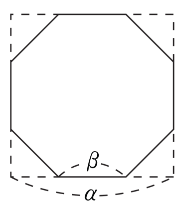
㉠, ㉡에서

$k=-1$일 때 $m=0$

$k=-2$일 때 $M=1$

$\therefore M+m=1$

33. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β라 하면, α, β는 이차방정식 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p의 값으로 옳은 것은?



① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2}-1$

② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-1$

③ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}$

④ $\alpha = \sqrt{2}+1, \quad p = -\sqrt{2}-2$

⑤ $\alpha = \sqrt{2}-1, \quad p = -\sqrt{2}-1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta$이다.

$2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\beta+\beta=\alpha$이므로

$\beta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)\alpha$

α, β는 $x^2+px+(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근이므로

$\alpha\beta=(\sqrt{2}-1)\alpha^2=\sqrt{2}+1$에서

$\alpha^2=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$

$\alpha>0$이므로 $\alpha=\sqrt{2}+1$

$\therefore\ p=-(\alpha+\beta)=-\left\{\alpha+(\sqrt{2}-1)\alpha\right\}=-\sqrt{2}-2$