

1. 이차방정식 $x^2 - 3x - (k - 1) = 0$ 이 실근을 갖게 하는 실수 k 의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 3x - (k - 1) = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (k - 1) \geq 0$$

$$9 + 4k - 4 \geq 0, 4k \geq -5$$

$$\therefore k \geq -\frac{5}{4}$$

2. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

3. $a^2b + b^2c - b^3 - a^2c$ 을 인수분해하면?

① $(a + b)(a - b)(b + c)$

② $(a - b)(b - c)(c + a)$

③ $(a - b)(a + b)(b - c)$

④ $(a - b)(a + b)(c - a)$

⑤ $(a - b)(b + c)(c - a)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2b + b^2c - b^3 - a^2c \\ &= a^2(b - c) - b^2(b - c) \\ &= (a - b)(a + b)(b - c) \end{aligned}$$

4. x, y 가 실수일 때, $(1+i)x + (1-i)y = \frac{2-i}{1+i}$ 을 만족하는 x, y 의 값은?

- ① $x = -\frac{1}{2}, y = 1$ ② $x = \frac{1}{2}, y = 1$ ③ $x = 1, y = -\frac{1}{2}$
④ $x = 1, y = 1$ ⑤ $x = 1, y = \frac{1}{2}$

해설

$$(x+y) + (x-y)i = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{1}{2}, \quad x-y = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, \quad y = 1$$

5. 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 이므로 } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

6. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x + 1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k + 3)$ 이다.

주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.

$$\therefore k + 3 = \frac{5}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

7. 연립방정식
$$\begin{cases} x + 2y = 2 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2y + 3z = 0 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ x + 3z = 0 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

의 해를 $x = a, y = b, z = c$ 라 할 때, $a(b + c)$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉢} \text{에서 } 2y - x = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉣} \text{에서 } 4y = 2 \quad \therefore y = \frac{1}{2} \cdots \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉣} \text{에서 } x = 1, z = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a(b + c) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6}$$

8. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$
 $x = -1$ 을 양변에 대입하면 $R = -1$
 $\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$
 $\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면 $3 = 2Q(1) - 1$
 $\therefore Q(1) = 2$

9. 방정식 $|x| + |x - 1| = 9$ 의 모든 근의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -20

해설

$|x| + |x - 1| = 9$ 에서
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - x + 1 = 9$
 $\therefore x = -4$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - x + 1 = 9$ (성립하지 않음)
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + x - 1 = 9$
 $\therefore x = 5$
따라서 모든 근의 곱은
 $(-4) \times 5 = -20$

10. 실수 a, b 에 대하여 연산*를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + 2\beta$ 의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서
 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3, 2$
 $\therefore \alpha = -3, \beta = 2 \ (\alpha < \beta)$
 $\therefore \alpha + 2\beta = 1$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$x^2 + (2m + a + b)x + m^2 + ab = 0$$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D = 0$

$$D = (2m + a + b)^2 - 4(m^2 + ab) = 0$$

$$4m^2 + a^2 + b^2 + 4ma + 2ab + 4mb - 4m^2 - 4ab = 0$$

m 에 관해 식을 정리하면

$$(4a + 4b)m + (a^2 - 2ab + b^2) = 0$$

$$4a + 4b = 0, \quad a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\therefore a + b = 0$$

12. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2 - (\sqrt{3} + 3)x + 3 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때, $a \times b$ 의 값은?

① $-\sqrt{3}$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$ 을 곱하면

$$3x^2 - (3 + 3\sqrt{3})x + 3\sqrt{3} = 0$$

$$x^2 - (1 + 3)x + \sqrt{3} = 0$$

$$(x - 1)(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore a \times b = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

13. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \dots\dots\textcircled{A}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \dots\dots\textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}\text{에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

14. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$2x+1 = \alpha$ 또는 $2x+1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$

$= \frac{\alpha+\beta-2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

15. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6이다.

16. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$$t = -x^2 + x + 3$$

$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ 에서}$$

$$3 \leq t \leq \frac{13}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} f(4 - f(x)) &= f(t) = t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \left(3 \leq t \leq \frac{13}{4}\right) \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7 을 갖는다.

17. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$, $x^2 + kx + 2 = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가질 때, k 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α 라 하면

$\alpha^2 + 2\alpha + k = 0$ 이고 $\alpha^2 + k\alpha + 2 = 0$ 이므로

$\alpha^2 + 2\alpha + k = \alpha^2 + k\alpha + 2$

$(2 - k)\alpha + (k - 2) = 0$

따라서 $\alpha = 1$ 이고

$1 + 2 + k = 0$ 이므로 $k = -3$

18. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면
즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x^5 - 5x = -3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= -x + 1 \\x^5 - 5x &= (x^2)^2 \times x - 5x \\&= x(-x + 1)^2 - 5x \\&= x^3 - 2x^2 - 4x \\&= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x \\&= -x^2 - x - 2 \\&= -(x^2 + x) - 2 \\&= -1 - 2 = -3\end{aligned}$$

19. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$ 가 이차식의 완전제곱이 되도록 a 의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

$$(\text{준식}) = (x^2 - 8x + 7)(x^2 - 8x + 15) + a$$

여기서, $x^2 - 8x + 7 = X$ 로 놓으면

$$(\text{준식}) = X(X + 8) + a$$

$$= X^2 + 8X + a = (X + 4)^2 + a - 16$$

따라서 $a = 16$

20. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 (x, y) 가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4 - 2\sqrt{2} \leq m \leq 4 + 2\sqrt{2}$

② $4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

③ $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$

④ $m \leq 4 - 2\sqrt{2}$ 또는 $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4 - 2\sqrt{3}$ 또는 $m > 4 + 2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$$x^2 + (m-1)x + m = x,$$

$$x^2 + (m-2)x + m = 0 \text{ 에서}$$

$$D = (m-2)^2 - 4m < 0$$

$$m^2 - 8m + 4 < 0$$

$$\therefore 4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$$

21. x, y 가 실수일 때, $2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 = 2(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 5$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x - 1)^2 \geq 0, (y + 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + y^2 + 6y + 16 \geq 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

22. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$ 를 만족할 때, k 의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4$, $\alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma$, $\beta + \gamma = 2 - \alpha$, $\gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore k = 4$

23. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로
양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면
 $(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$
 $1 - \alpha^{n+1} = 0$
 $\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로
 $\alpha^6 = 1$
 $\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$
 $\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.

24. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

- ① 0 개
- ② 1 개
- ③ 2 개
- ④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.
- ⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}, \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}, (a+b)^2 = ab, a^2 + ab + b^2 = 0$
 $\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는
 $a = 0, b = 0$ 뿐이다.
따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 는 없다.

25. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

- ① $R + R'B$
- ② $R' + RB$
- ③ RR'
- ④ R
- ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
 $A = BQ + R \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $Q = B'Q' + R' \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $A = B(B'Q' + R') + R$
 $= (BB')Q' + (R + R'B)$
 $R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.
그런데 $R \leq B - 1, R' \leq B' - 1$ 이므로
 $R + R'B \leq (B - 1) + (B' - 1)B$
 $= BB' - 1 < BB'$
따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

26. 다항식 $f(x)$ 를 다항식 $g(x)$ 로 나눈 나머지를 $r(x)$ 라 할 때, $f(x) - g(x) - 2r(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$

② $-r(x)$

③ 0

④ $r(x)$

⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = g(x)Q(x) + r(x)$$

$$\therefore f(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x)Q(x) + r(x) - g(x) - 2r(x)$$

$$= g(x) \{Q(x) - 1\} - r(x)$$

여기서 $g(x)$ 의 차수는 $-r(x)$ 의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$ 이다.