1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y = 12x - (1+3x)(1-3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$ ② $-\frac{5}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1+3x)(1-3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = -x^2 + 4x \ (1 \le x \le 5)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 4

▷ 정답 : 최솟값 −5

해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$

꼭짓점 : $x = 2$ 일 때 $y = 4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 1 \text{ 일 때 } y = 3 \\ x = 5 \text{ 일 때 } y = -5 \end{cases}$

$x = 2$에서 최댓값 4

$x = 5$에서 최솟값 −5

6. 이차함수$y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

7. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로
$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$
즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로
$b = -4,\ c = 3$
$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

8. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$ $\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ $(0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

10. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점 $(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

11. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

12. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),

$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

13. x의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x-1)^2 + 3$
$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

14. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 접하도록 하는 상수 $p,\ q$의 값은?

① $p = -1,\ q = -1$ 또는 $p = -3,\ q = -9$

② $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

③ $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

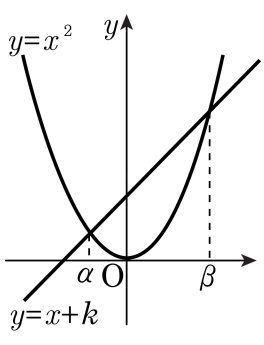
④ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

⑤ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가
점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$4 = 1 - 2p + q$에서
$2p - q = -3 \cdots$ ㉠
한편, x축에 접하므로
$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

15. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\alpha + \beta = 1$ ㉡ $k > 0$ ㉢ $\alpha\beta = -k$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 1 \cdots$ (참)

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$의 판별식을 D라 하면 $D = 1 + 4k > 0$
에서 $k > -\frac{1}{4} \cdots$ (거짓)

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta = -k \cdots$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

16. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

17. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

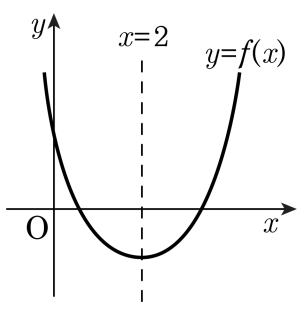
▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

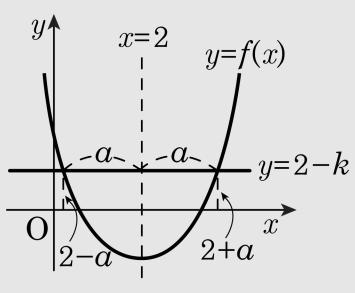
18. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, x에 대한 방정식 $(f\circ f)(x)=0$의 모든 실근의 합은? (단, $y=f(x)$의 그래프는 x축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(f(x))=0$에서 $f(x)=t$로 놓으면
$f(t)=0$을 만족시키는 두 실근은
$t=2-k$ 또는 $f=2+k$
$(0<k<2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x)=2-k$ 또는 $f(x)=2+k$



(i) $f(x)=2-k$를 만족시키는 x의 값은
$y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=2-k$의 교점의 x좌표이므로
$x=2-\alpha$ 또는 $x=2+\alpha$
(ii) $f(x)=2+k$를 만족시키는 x의 값도
마찬가지로 생각하면 $x=2-\beta$ 또는 $x=2+\beta$
따라서 $f(f(x))=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2-\alpha)+(2+\alpha)+(2-\beta)+(2+\beta)=8$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{PQ}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

20. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

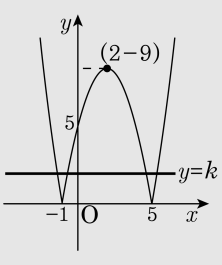
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$