1. 다항식 x^3-3x-3을 다항식 x^2-2x-1로 나누었을 때의 몫이 $ax+b$이고, 나머지가 $cx+d$이었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3-3x-3=(x^2-2x-1)(ax+b)+cx+d$

에서 계수를 비교하면

$a=1,\ -b+d=-3,\ -a-2b+c=-3,\ b-2a=0$

에서 $a=1,\ b=2,\ d=-1,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c+d=1+2+(-1)+2=4$

2. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$

$=\{(4a^2-9b^2)^3\}^4$

$=(4a^2-9b^2)^{12}$

$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

3. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$

이것은 k에 대한 항등식이므로

$2x+3y+5=0$

$3x-y-9=0$

연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$

$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

4. 다항식 $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + k$가 일차식 $x-1$을 인수로 가질 때, 이 다항식 $f(x)$를 인수분해 하면?

① $(x-2)(x-1)(x+1)$ ② $(x-1)x(x+2)$

③ $(x+1)(x-1)(x+2)$ ④ $(x-2)(x-1)(x+2)$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)$

해설

$f(x) = (x-1)Q(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

$\therefore \ f(1) = 2 + k = 0, \qquad \therefore \ k = -2$

즉, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$= (x-1)(x+1)(x+2)$

5. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$

6. $(1+ai)^2=2i$ (a 는 실수)라 할 때 $(1+ai)(1-ai)$ 의 값을 구하시오.
(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 2

해설

$(1+ai)^2=2i$ 에서 $(1-a^2)+2ai=2i$
복소수의 상등에서 $1-a^2=0,\ 2a=2$
$\therefore\ a=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+ai)(1-ai)&=(1+i)(1-i)\\&=1-(-1)\\&=2\end{aligned}$$

7. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

i) $x \geq 1$일 때
$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ii) $x<1$일 때
$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

8. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 2, α일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k\cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$

$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$

$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$

$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$

$\therefore\ k+\alpha=-4$

9. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2-(k-3)>0$

$\therefore \ k<4$

$\therefore$최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

10. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$일 때 $p^2 + q^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

11. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2\ \therefore\ a + b = 14$

12. x의 범위가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

13. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서
$x=1,\ x=-1$을 대입하면 성립하므로
$x^4+x^3-7x^2-x+6$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$
따라서 최대의 근은 2

14. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=a \\ x-ay=1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a=-1$

② $a=1$

③ $a=\pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

15. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$　② 4　③ $-3\sqrt{2}$

④ -4　⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0$ $\quad\therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

16. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a - b + c$　　② $a + b - c$　　③ $-a + b - c$

④ $-a + b + c$　　⑤ $-a - b + c$

해설

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 - c^2 + 2bc &= a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc) \\
&= a^2 - (b - c)^2 \\
&= (a + b - c)(a - b + c)
\end{aligned}
$$

인수 : $(a + b - c)$, $(a - b + c)$(단, 복부호 동순)

17. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선
② 기울기가 음인 직선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 아래로 볼록한 포물선
⑤ 원

해설

$$(3-4i)z = (3-4i)(x+yi)$$
$$= (3x+4y) + (-4x+3y)i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \dfrac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$기울기가 양인 직선)

18. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\&=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

19. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$

$(\overline{x+yi}) = \dfrac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$

$x+yi = 1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

20. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 아래 표에서 옳은 것의 개수는?

㉠ $\alpha + \beta = 3$	㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 6$
㉢ $\alpha\beta = -3$	㉣ $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} = 2$
㉤ $(\alpha - 1)(\beta - 1) = \dfrac{1}{2}$	

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \dfrac{3}{2}$

㉠ $\alpha + \beta = 3$ (○)

㉡ $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$ (○)

㉢ $\alpha\beta = \dfrac{3}{2} \neq -3$ (×)

㉣ $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta - \alpha}{\beta\alpha}$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 9 - 4 \cdot \dfrac{3}{2} = 3 \quad |\alpha - \beta| = \sqrt{3}$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} \neq 2$ (×)

㉤ $\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = \dfrac{3}{2} - 3 + 1 = -\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2}$ (×)

21. 이차방정식 $4x^2 - ax + 2a = 0$의 두 근의 합과 곱을 두 근으로 하는 이차방정식이 $2x^2 - bx + 1 = 0$일 때, $a + b$의 값은? (단, $a > 0$)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

두 근이 α, β일 때,

$\alpha + \beta = \dfrac{a}{4}$, $\alpha\beta = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{4}, \dfrac{a}{2}$가 $2x^2 - bx + 1 = 0$의 두 근이므로

$\dfrac{a}{4} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{1}{2}$

$a^2 = 4$, $a = 2$ $(a > 0)$

$\dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2}$, $b = 3$

$\therefore$ $a + b = 3 + 2 = 5$

22. 갑, 을 두 학생이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데, 갑은 이차항의 계수를 잘못 보고 풀어 두 근 $1 \pm \sqrt{6}$을 얻었고, 을은 상수항을 잘못 보고 풀어 두 근 $-\frac{1}{3}$, 1을 얻었다. 이 이차방정식의 올바른 근을 구하여 더하면 얼마인가?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{1}{3}$　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

먼저 갑이 푼 이차식의 형태를 알아보자.
갑이 푼 이차식을 $a'x^2 + bx + c = 0$라 하면

$-\frac{b}{a'} = 1 + \sqrt{6} + 1 - \sqrt{6} = 2,$

$\frac{c}{a'} = (1 + \sqrt{6})(1 - \sqrt{6}) = -5$이므로

갑이 푼 이차식은 위의 값들을 대입해 정리하면
$x^2 - 2x - 5 = 0$의 실수배 형태인 것을 알 수 있다.
같은 방법으로 을이 푼 이차식을 알아보면

$-\frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \frac{c'}{a} = -\frac{1}{3}$으로

$3x^2 - 2x - 1 = 0$의 실수배임을 알 수 있다.
b값은 둘 다 잘못보고 풀지 않았는데 구한 식의 원형 2개가 b값이 일치하므로
$a = 3,\ c = -5$임을 알 수 있고 b는 -2임을 알 수 있다.

따라서 원래 식에서 두 근의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

23. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a^3 + b^3$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식$-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a + 2)x + b + 1 = 0$의 판별식을
D_2라 할 때,
$D_2 = (a + 2)^2 - 4(b + 1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a + 2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$ 를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

24. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 w라고 할 때, $\dfrac{w^{102}+w^{101}}{w^{100}}+\dfrac{w^{99}}{w^{101}+w^{100}}$을 계산하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3=1 \Rightarrow \omega^3=1$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^2+\omega+1=0, \omega^2+\omega=-1$

$\dfrac{\omega^{102}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\dfrac{\omega^{99}}{\omega^{101}+\omega^{100}}$

$=\dfrac{\omega^2+\omega}{1}+\dfrac{1}{\omega^2+\omega}$

$=-1-1=-2$

25. $|x+1|+|y-2|=0$을 만족하는 실수 x, y의 곱 xy의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$|x+1| \geq 0$, $|y-2| \geq 0$이므로 $x+1=0$, $y-2=0$

$\therefore\ x=-1$, $y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy=-1 \cdot 2=-2$