1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$
② $1 < k < 3$
③ $k < 3$
④ $3 < k < 5$
⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면

α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠

이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로

$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면

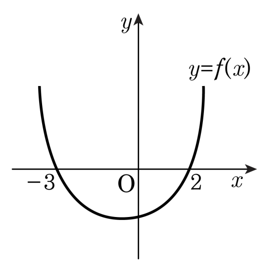
$(\beta - \alpha)^2 = 4$

$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

5. 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y 절편의 곱을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$ 으로 놓으면
$y' = 2x$ 이므로 $y'_{x=t} = 2t$ 는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\dfrac{D}{4} = 0$ 이므로
$(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$ 에서
$(t + 1)(t - 2) = 0 \quad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$ 일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$ 일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y 절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

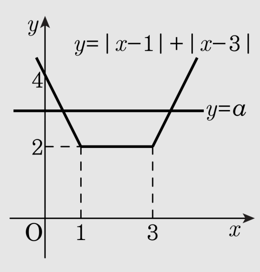
6. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$

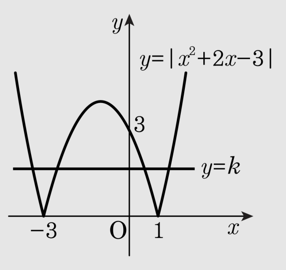


7. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

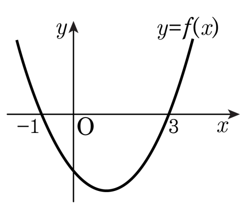
① $k \geq 3$　② $k > 4$　③ $3 \leq k < 4$
④ $0 < k < 3$　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?



① -1 ② 0 ③ 1

④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1,\ 3$ 이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이므로
$f(2x-1) = 0$ 에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2 이다.

9. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$

즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

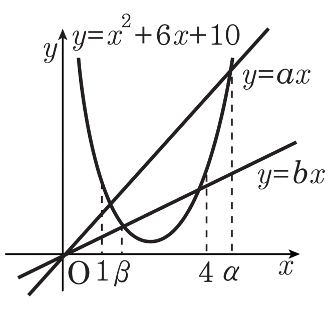
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는

직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로

$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

10. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β, 4 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$

즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$1 + \alpha = a + 6$

$1 \cdot \alpha = 10$

$\therefore\ \alpha = 10,\ a = 5$

방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$

즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β, 4 이므로

$\beta + 4 = b + 6$

$4 \cdot \beta = 10$

$\therefore\ \beta = \frac{5}{2},\ b = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$