

1. 다항식 x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$ 가 되도록 상수 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8 을 x^2+4x+b 로 직접나눈 나머지는

$$(a-b+16)x+4b-8$$

$$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots\textcircled{㉠}$$

$\textcircled{㉠}$ 이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a-b+16=3, 4b-8=4$$

$$\therefore a=-10, b=3$$

$$\therefore a+b=-7$$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10, b=3, p=-4$ 를 구해도 된다.

2. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1, x - 2$ 로 나누어 떨어진다.

$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots \textcircled{A}$

$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 으로부터 $a = -\frac{7}{2}, b = \frac{7}{2}$

$\therefore a + b = 0$

3. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ -3

해설

$$x + y = 2, \quad xy = 3$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$$

4. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3) \cdot (-3)} = \sqrt{9} = 3$
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5 \times (-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\frac{2}{-6}} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}i$
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① I, II

② I, III

③ II, III, IV

④ II, IV

⑤ III, IV

해설

- I. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
 $\therefore$ 옳지 않다.
II. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
 $\therefore$ 옳다.
III. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\frac{2}{6}} \cdot \frac{i}{i^2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}i$
 $\therefore$ 옳지 않다.
IV. $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
 $\therefore$ 옳다.

5. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

6. 다항식 $f(x)$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ 을 각각 양변에 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

7. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$

② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$

④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y + 4)x - (y^2 - y - 2) \\&= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2) \\&= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\} \\&= (2x + y - 2)(x - y - 1)\end{aligned}$$

8. 임의의 실수 a, b 에 대하여 연산 Δ 를 $a\Delta b = a^2 - ab + b^2$ 라 할 때, $(x^2\Delta x) + (2x\Delta x) - (x\Delta 1) - 3$ 을 인수분해하면?

- ① $(x-1)(x+1)(x^2-x+4)$ ② $(x-2)(x+1)(x^2-x+4)$
- ③ $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$ ④ $(x-1)(x+1)(x+2)^2$
- ⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)^2$

해설

$$\begin{aligned}x^2\Delta x &= x^4 - x^3 + x^2 \\2x\Delta x &= 4x^2 - 2x^2 + x^2 = 3x^2 \\x\Delta 1 &= x^2 - x + 1 \text{ 이므로} \\ \text{준식} &= x^4 - x^3 + x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 1 - 3 \\&= x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4 \\&= (x-1)(x+1)(x^2-x+4)\end{aligned}$$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\frac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $-3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} \\ &= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i \\ &= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i \\ & a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2} \\ & \therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

10. 이차방정식 $x^2 + 2(m-1)x - 2m - 6 = 0$ 의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m 의 범위는 ?

① $m < 1$

② $-3 < m < 1$

③ $m < -3$ 또는 $m > 1$

④ $m > -3$

⑤ $m < -1$

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta > 0, \alpha\beta < 0$$

($\therefore$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(m-1) > 0 & \therefore m < 1 \\ \alpha\beta = -2m - 6 < 0 & \therefore m > -3 \end{cases}$$

$$\therefore -3 < m < 1$$

11. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

① 2^n

② 2^{n+1}

③ 2^{n+2}

④ 2^{n+3}

⑤ 2^{n+4}

해설

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= A, (a-b)^n = B \\(\text{준식}) &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\&= 4AB \\&= 4\{(a+b)(a-b)\}^n \\&= 4 \times 2^n \\&= 2^{n+2}\end{aligned}$$

12. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켄레복소수이다.)

- ㉠ $\alpha + \bar{\alpha}$ 는 실수이다.

㉡ $\alpha - \bar{\alpha}$ 는 허수이다.

㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.

㉤ $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉤

④ ㉠, ㉤

⑤ ㉡, ㉢

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수) 라 하면

㉠ $\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (실수)

∴ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha = \bar{\alpha}$ 이므로 $\alpha - \bar{\alpha} = 0$ 이다.

따라서 $\alpha - \bar{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

∴ 거짓

㉢ $i^2 = -1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

∴ 거짓

㉤ $\overline{\alpha + \beta} = \overline{(a + c) + (b + d)i}$
 $= (a + c) - (b + d)i$
 $= (a - bi) + (c - di)$
 $= \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

$\overline{\alpha\beta} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i}$
 $= (ac - bd) - (ad + bc)i$
 $= (a - bi)(c - di)$
 $= \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

∴ 참

13. a, b, c 는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$ 의 해가 α, β 일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 구하면?

- ① α, β ② $-\alpha, -\beta$ ③ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
 ④ $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha, -\beta$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$cx^2 - bx + a = 0$ 에서

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$ 의 양변을 $x^2 (\neq 0)$ 으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$ 라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } \frac{1}{\beta}$$

$\therefore cx^2 - bx + a = 0$ 의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$ 이다.

14. $(z - \bar{z}) \times i$ 가 음수이고 $\frac{z}{1+z^2}$ 와 $\frac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 ④ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1 + i$

해설

$z = a + bi, \bar{z} = a - bi$
 $(z - \bar{z}) \times i < 0$ 에서 $-2b < 0 \therefore b > 0$
 $\frac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로
 $\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$
 $\therefore z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z} - 1)(z - \bar{z}) = 0$
 $\therefore z\bar{z} = 1 (\because z - \bar{z} \neq 0)$
 $a^2 + b^2 = 1 \dots \textcircled{1}$
 한편, $\frac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로
 $\frac{z^2}{1+z} = \overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)} = \frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$
 $\Leftrightarrow z^2(1+\bar{z}) = \bar{z}^2(1+z)$
 $\Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z} + z\bar{z}) = 0$
 $\therefore z + \bar{z} = -z\bar{z} = -1 (\because z - \bar{z} \neq 0)$
 $2a = -1 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2} (\because b > 0)$
 $\therefore z^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

15. 복소수 z 가 $z^2 = \bar{z}$ 일 때, z 이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

- ① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$$z^2 = \bar{z} \text{에서 } (a + bi)^2 = a - bi$$

$$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

$$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$$

$$\therefore b = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{i) } b = 0 \text{ 일 때 : } a^2 = a \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\text{ii) } a = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 : } \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \quad \therefore b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = 0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

따라서 모든 z 의 합은 0 이다.