1. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

2. 다항식 x^3+ax^2+bx-1이 x^2-3x+2로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 로 놓으면
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1)=1+a+b-1=0$ 즉, $a+b=0\cdots$ ㉠
$f(2)=8+4a+2b-1=0$ 즉, $4a+2b=-7\cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{7}{2}$
$\therefore a+b=0$

3. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2$, $xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

4. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

5. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore \ a = -2, b = 3$

$\therefore ab = -6$

6. 다항식 $f(x)$에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3,\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$일 때, $f(x)$를 $(2x-1)(3x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$

$x = \frac{1}{2},\ x = \frac{1}{3}$을 각각 양변에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3,\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

7. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$

② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$

④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y+4)x - (y^2 - y - 2) \\ &= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2) \\ &= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\} \\ &= (2x + y - 2)(x - y - 1)\end{aligned}$$

8. 임의의 실수 a, b에 대하여 연산 $\triangle$를 $a\triangle b = a^2 - ab + b^2$라 할 때, $(x^2\triangle x) + (2x\triangle x) - (x\triangle 1) - 3$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+1)(x^2-x+4)$ ② $(x-2)(x+1)(x^2-x+4)$

③ $(x-1)(x+2)(x^2-x+2)$ ④ $(x-1)(x+1)(x+2)^2$

⑤ $(x-2)(x+1)(x+2)^2$

해설

$x^2\triangle x = x^4 - x^3 + x^2$

$2x\triangle x = 4x^2 - 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$x\triangle 1 = x^2 - x + 1$이므로

준 식 $= x^4 - x^3 + x^2 + 3x^2 - x^2 + x - 1 - 3$

$= x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 4$

$= (x-1)(x+1)(x^2-x+4)$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$　④ $4\sqrt{3}$　⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$
$$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$$
$$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$$
$$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

10. 이차방정식 $x^2+2(m-1)x-2m-6=0$ 의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m 의 범위는 ?

① $m<1$

② $-3<m<1$

③ $m<-3$ 또는 $m>1$

④ $m>-3$

⑤ $m<-1$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$

($\because$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2(m-1)>0 & \therefore\ m<1 \\ \alpha\beta=-2m-6<0 & \therefore\ m>-3 \end{cases}$$

$\therefore\ -3<m<1$

11. $a^2-b^2=2$ 일 때, $\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$ 의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n=A,\ (a-b)^n=B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2+2AB+B^2\right)-\left(A^2-2AB+B^2\right)\\ &= 4AB\\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n\\ &= 4\times 2^n\\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

12. 복소수 α, β 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha+\overline{\alpha}$ 는 실수이다.
>
> ㉡ $\alpha-\overline{\alpha}$ 는 허수이다.
>
> ㉢ α^2 이 실수이면 α 도 실수이다.
>
> ㉣ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ 이고 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉣ ⑤ ㉡, ㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ $(a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수$)$라 하면

㉠ $\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (실수)

$\therefore$ 참

㉡ α 가 실수이면 $\alpha=\overline{\alpha}$ 이므로 $\alpha-\overline{\alpha}=0$ 이다.

따라서 $\alpha-\overline{\alpha}$ 가 반드시 허수인 것은 아니다.

$\therefore$ 거짓

㉢ $i^2=-1$ 은 실수이지만 i 는 순허수이다.

$\therefore$ 거짓

㉣
$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\&=(a+c)-(b+d)i\\&=(a-bi)+(c-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)i\\&=(a-bi)(c-di)\\&=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}\end{aligned}$$

$\therefore$ 참

13. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$ ② $-\alpha,\ -\beta$ ③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\ \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } \frac{1}{\beta}$$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

14. $(z-\bar{z})\times i$ 가 음수이고 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 와 $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 모두 실수일 때, z^2 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ② $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ③ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
④ $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ⑤ $1+i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

$(z-\bar{z})\times i<0$ 에서 $-2b<0 \therefore b>0$

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 가 실수이므로

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$$

$\therefore\ z(1+\bar{z}^2)=\bar{z}(1+z^2) \Leftrightarrow (z\bar{z}-1)(z-\bar{z})=0$

$\therefore\ z\bar{z}=1\ (\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$a^2+b^2=1\cdots㉠$

한편, $\dfrac{z^2}{1+z}$ 이 실수이므로

$$\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}=\frac{\bar{z}^2}{1+\bar{z}}$$

$\Leftrightarrow\ z^2(1+\bar{z})=\bar{z}^2(1+z)$

$\Leftrightarrow\ (z-\bar{z})(z+\bar{z}+z\bar{z})=0$

$\therefore\ z+\bar{z}=-z\bar{z}=-1(\because\ z-\bar{z}\neq 0)$

$2a=-1\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because b>0\ )$

$$\therefore\ z^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

15. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$z^2 = \bar{z}$ 에서$(a + bi)^2 = a - bi$

$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$

$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$

i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$

ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ $\therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

따라서 모든 z의 합은 0이다.