1. 유리수 $\frac{14}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2}$ 에 어떤 수 a 를 곱하여 유한소수를 만들 때, 가장 작은 자연수 a 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$\frac{14}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2} = \frac{1}{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7}$ 이므로

$\frac{1}{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7} \times a$가 유한소수가 되도록 하는 a는 21입니다.

2. 다음 분수 $\frac{5}{27}$ 을 순환소수로 나타내었을 때 순환마디는?

① 5 ② 27 ③ 15 ④ 58 ⑤ 185

해설

$5 \div 27 = 0.185185\cdots$, 순환마디 185

3. 다음 중 $x = 21.10\dot{3}$을 분수로 나타내는 계산에서 쓰이는 식은?

① $10x - x$ ② $100x - x$ ③ $1000x - 100x$

④ $100x - 10x$ ⑤ $1000x - x$

해설

$x = 21.10\dot{3} = 21.10333\cdots$ 이므로 이를 분수로 나타내기 위한 식은 $1000x - 100x$이다.

4. 다음 중 순환소수를 분수로 나타내는 계산과정이 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $0.\dot{5}\dot{1} = \dfrac{51}{99}$

② $0.4\dot{0}\dot{3} = \dfrac{403-2}{99}$

③ $1.2\dot{3} = \dfrac{123-12}{90}$

④ $2.5\dot{1}\dot{8} = \dfrac{2518-25}{990}$

⑤ $3.\dot{2}0\dot{5} = \dfrac{205}{999}$

해설

① $0.\dot{5}\dot{1} = \dfrac{51}{99}$

② $0.4\dot{0}\dot{3} = \dfrac{403-4}{990}$

③ $1.2\dot{3} = \dfrac{123-12}{90}$

④ $2.5\dot{1}\dot{8} = \dfrac{2518-25}{990}$

⑤ $3.\dot{2}0\dot{5} = \dfrac{3205-3}{999}$

5. 다음 중 가장 큰 수는?

① 0.72 ② $0.7\dot{2}$ ③ $0.\dot{7}$ ④ 0.7 ⑤ $0.\dot{7}\dot{2}$

해설

① 0.72

② $0.7\dot{2} = 0.7222\cdots$

③ $0.\dot{7} = 0.777\cdots$

④ 0.7

⑤ $0.\dot{7}\dot{2} = 0.727272\cdots$

따라서 가장 큰 수는 $0.\dot{7}$ 이다.

6. $\frac{3}{4}$ 을 분수 $\frac{a}{10^n}$ 의 꼴로 고칠 때, $a+n$ 의 최솟값은? (단, a, n 은 자연수)

① 69 ② 72 ③ 75 ④ 76 ⑤ 77

해설

$$\frac{3\times 5^2}{4\times 5^2}=\frac{75}{10^2}\ ,\ a+n=75+2=77$$

7. 두 유리수 $\frac{5}{84}$, $\frac{49}{45}$ 에 가장 작은 자연수 a 를 곱하여 두 수 모두 유한소수가 되게 하려고 할 때, a 의 값은?

① 9 ② 21 ③ 63 ④ 108 ⑤ 189

해설

$\frac{5}{84} = \frac{5}{2^2 \times 3 \times 7}$, $\frac{49}{45} = \frac{7^2}{3^2 \times 5}$ 이므로

가장 작은 자연수 a 는 $3^2 \times 7$

8. $\frac{21}{2^2 \times 5 \times a}$ 을 소수로 나타내면 무한소수가 된다고 한다. a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$\frac{21}{2^2 \times 5 \times a}$ 이 무한소수가 되기 위해서는 분모에 $2, 5$ 이외의 소인수가 있어야 하는데, a 의 값이 될 수있는 가장 작은 자연수는 9 이다.

9. $\frac{a}{48}$, $\frac{a}{112}$ 가 모두 유한소수로 나타내어지도록 하는 가장 작은 자연수 a 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$\frac{a}{48} = \frac{a}{2^4 \times 3}$

$\frac{a}{112} = \frac{a}{2^4 \times 7}$

유한소수가 되려면 a 는 21 의 배수

10. 유리수 $\frac{15a}{84}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 된다고 한다. 이때, a 가 될 수 있는 수 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\frac{15a}{84} = \frac{3 \times 5 \times a}{2^2 \times 3 \times 7}$

a 가 7 의 배수이면 유한소수가 된다.

$\therefore\ a = 7$

11. 소수 $0.038888\cdots$ 을 기약분수로 나타내었을 때, 분모와 분자의 합은?

① 938 ② 935 ③ 187 ④ 184 ⑤ 1037

해설

$0.038888\cdots = 0.03\dot{8} = \dfrac{38-3}{900} = \dfrac{7}{180}$ 이므로

분모와 분자의 합은 187 이다.

12. 부등식 $\frac{7}{10} < x \leq 1.\dot{9}$을 만족시키는 정수 x의 갯수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$1.\dot{9} = \frac{18}{9} = 2$

$\frac{7}{10} < x \leq 2$

$\therefore x = 1, 2$

즉, 2개

13. $\frac{1}{5} < 0.\dot{x} \leq \frac{1}{3}$ 을 만족하는 자연수 x 를 모두 더하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{1}{5} < \frac{x}{9} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{9}{45} < \frac{5x}{45} \leq \frac{15}{45}$$

$$9 < 5x \leq 15$$

$$\frac{9}{5} < x \leq 3$$

만족하는 x 의 값은 2, 3 이므로 모두 더하면 5 이다.

14. 자연수 x, y 에 대하여 $0.30\dot{x} = \dfrac{y}{330}$ 일 때, 이 조건을 만족시키는 x, y 에 대하여 $x \times y$ 의 값을 구하여라. (단, $xy < 500$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 300

해설

$0.30\dot{x} = \dfrac{300 + x - 3}{990} = \dfrac{297 + x}{990}$

$\dfrac{y}{330} = \dfrac{y \times 3}{330 \times 3} = \dfrac{3y}{990}$

즉, $\dfrac{297 + x}{990} = \dfrac{3y}{990}$ 이므로 $297 + x = 3y$

이때, $3y$ 는 3 의 배수이므로 $297 + x$ 도 3 의 배수이어야 한다.

따라서, $0 < x \leq 9$ 인 정수이므로 $x = 3, 6, 9$ 이다.

$x = 3$ 일 때, $y = 100$

$x = 6$ 일 때, $y = 101$

$x = 9$ 일 때, $y = 102$

$\therefore x \times y = 300$ ($\because x \times y < 500$)

15. $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{3}{45}, \cdots, \frac{199}{45}, \frac{200}{45}$ 중에서 유한소수이면서, 정수가 아닌 유리수의 개수는?

① 4개 ② 18개 ③ 22개 ④ 62개 ⑤ 66개

해설

$\frac{n}{45} = \frac{n}{3^2 \times 5}$ 이 유한소수가 되게 하는 n은 9의 배수이므로 22개, 이때 정수가 되게 하는 n은 45의 배수로 4개이다.
따라서 $22 - 4 = 18$개이다.

16. $\frac{2}{125}$ 를 유한소수로 나타내기 위하여 $\frac{a}{10^n}$ 의 꼴로 고칠 때, $a+n$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a , n 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$\frac{2}{125}=\frac{2}{5^3}$ 의 분자, 분모에 2^3 을 곱하면 $\frac{2^4}{2^3\times 5^3}=\frac{16}{10^3}$

$\therefore a=16$, $n=3$

$\therefore a+n=16+3=19$

17. 유리수 $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \cdots\cdots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ 중에서 유한소수는 모두 몇 개인가?

① 8개 ② 9개 ③ 10개 ④ 11개 ⑤ 12개

해설

분모가 2의 거듭제곱으로만 2^4, 2^5, 2^6
분모가 5의 거듭제곱으로만 5^2
2와 5의 거듭제곱으로만 2×5, $2^2\times5$, $2^3\times5$, $2^4\times5$, 2×5^2, $2^2\times5^2$
$\therefore$ 10개

18. 경식이는 다음 계산을 하기 위해 계산기를 사용하고 있다. 마지막 $=$ 버튼을 눌렀을 때, 계산기 화면에 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 되는 것은?

① $4 \div 25$ ② $3 \div 18$ ③ $11 \div 50$

④ $7 \div 4$ ⑤ $21 \div 14$

해설

② $3 \div 18 = 0.16666\cdots$ 이므로 순환마디가 6 인 순환소수가 되어 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 된다.

19. 자연수 $a, b(a < b)$ 에 대하여 기약분수 $\frac{a}{b}$ 를 순환소수로 나타내면 $0.\dot{x}y\dot{z}$ 가 된다. b 가 될 수 있는 자연수를 모두 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 27

▷ 정답: 37

▷ 정답: 111

▷ 정답: 333

▷ 정답: 999

해설

순환소수 $0.\dot{x}y\dot{z}$ 는 약분하기 전의 분모가 999 이어야 하므로 기약분수의 분모로 가능한 수는 999 의 약수이다.
이 때, $999 = 3^3 \times 37$ 이므로 999 의 약수는 $1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999$ 이다.
그런데 기약분수의 분모가 $1, 3, 9$ 인 숫자는 순환마디의 숫자의 개수가 1개이므로 조건에 맞지 않는다.
따라서 조건에 맞는 분모는 $27, 37, 111, 333, 999$ 이다.

20. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하면?

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = 0.\dot{1}$$

① $0.\dot{5}$ ② $0.\dot{6}$ ③ $0.\dot{7}$ ④ $0.\dot{8}$ ⑤ $0.\dot{9}$

해설

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}$$

$$= \frac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{-1}{x-1}} = -x+1$$

$$-x+1 = 0.\dot{1}$$

$$\therefore\ x = 1-0.\dot{1}$$

$$= 1-\frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$= 0.\dot{8}$$

21. $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ 를 분수로 고치면 $\frac{213}{330}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{213}{330} = \frac{639}{990} = 0.6\dot{4}\dot{5}$ 이므로

$a=6,\ b=4,\ c=5$ 이다.

$\therefore\ a+b+c=15$

22. 다음은 순환소수 $6.7\dot{3}\dot{5}\dot{2}$를 분수로 나타내는 과정이다. (가) ~ (마)에 들어갈 수로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

$x = 6.7\dot{3}\dot{5}\dot{2}$로 놓으면 $x = 6.7352352\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 [(가)]을 곱하면
[(가)] $x = 67352.352352\cdots$ ㉡
㉠의 양변에 [(나)]을 곱하면
[(나)] $x = 67.352352\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢을 하면 [(다)] $x =$ [(라)]
$\therefore\ x =$ [(마)]

① (가) 10000　② (나) 10　③ (다) 9999
④ (라) 67285　⑤ (마) $\dfrac{13457}{9999}$

해설

$x = 6.7\dot{3}\dot{5}\dot{2}$으로 놓으면 $x = 6.7352352\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 10000을 곱하면
$10000x = 67352.352352\cdots$ ㉡
㉠의 양변에 10을 곱하면
$10x = 67.352352\cdots$ ㉢
㉡ − ㉢을 하면 $9990x = 67285$
$\therefore x = \dfrac{13457}{1998}$

23. 기약분수 A 를 순환소수로 나타내는데, 영철이는 분자를 잘못 보아서 답이 $0.\dot{3}\dot{7}$ 이 되었고, 영은이는 분모를 잘못 보아서 답이 $1.3\dot{5}$ 가 되었다. 이 때, 기약분수 A 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{61}{99}$

해설

영철 : $0.\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}$,

영은 : $1.3\dot{5} = \frac{135 - 13}{90} = \frac{61}{45}$

따라서 처음의 기약분수는

$\frac{(\text{영은이가 본 분자})}{(\text{영철이가 본 분모})} = \frac{61}{99} = \text{A}$ 이다.

24. $0.\dot{4}$ 와 $0.\dot{7}$ 사이의 분모가 90 인 분수 중 소수로 나타내었을 때 유한소수가 되는 것의 개수는 n 개이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$$0.\dot{4} < \frac{a}{90} < 0.\dot{7}$$

$$\frac{4}{9} < \frac{a}{90} < \frac{7}{9}$$

$$\frac{40}{90} < \frac{a}{90} < \frac{70}{90}$$

유한소수가 되기 위해 a 는 9 의 배수여야 하므로

40 과 70 사이의 9 의 배수는 45, 54, 63 의 3 개이다.

25. 자연수 n 과 유리수 x, y 에 대하여 $xy = -1$ 일 때, $x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n} + (xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$xy = -1$ 이면 $\frac{1}{x} = -y$, $\frac{1}{y} = -x$ 이므로

$$x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$$
$$+(xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$$
$$= x^{2n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-1} + y^{2n-1} + \left(\frac{1}{y}\right)^{2n-1}$$
$$+(-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$$
$$= x^{2n-1} + (-y)^{2n-1} + y^{2n-1} + (-x)^{2n-1}$$
$$+(-1)^{2n-1} + (-1)^{1-2n}$$

자연수 n 에 대하여 $2n - 1$ 은 홀수이므로

$$\therefore\ x^{2n-1} + x^{1-2n} + y^{2n-1} + y^{1-2n}$$
$$+(xy)^{2n-1} + (xy)^{1-2n}$$
$$= x^{2n-1} - y^{2n-1} + y^{2n-1} - x^{2n-1} - 1 - 1$$
$$= -2$$

26. 분수 $\frac{7a}{130}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고 이 분수를 기약분수로 나타내면 분자는 4 의 배수가 된다고 한다. 이 때, 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 104

해설

$\frac{7a}{130} = \frac{7a}{2 \times 5 \times 13}$ 이므로 유한소수가 되기 위해서는 a 가 13 의 배수가 되어야 한다.
또한 분모에 소인수 2를 가지고 있으므로 기약분수로 만들었을 때, 분자가 4의 배수가 되려면 13과 8을 인수로 가지고 있어야 한다.
따라서 a 는 8과 13 의 공배수 이어야 한다.
따라서 자연수 a 의 최솟값은 8과 13 의 최소공배수이다.
$\therefore\ 8 \times 13 = 104$

27. 분수 $\frac{a}{440}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 고치면 $\frac{1}{b}$ 이 된다. 이때, a 의 값은 모두 몇 개인가? (단, $b > 1$)

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\frac{a}{2^3 \times 5 \times 11}$ 가 유한소수가 되려면 a 의 값은 11 의 배수가 되어야 한다. 또한 기약분수로 고쳤을 때 분자의 값이 1이 되어야 하므로 a 의 값은 분모의 인수 11 의 값을 반드시 포함하되 2와 5를 적절히 조합하여야 한다. 따라서 가능한 a 의 값은
$11,\ 2 \times 11,\ 2^2 \times 11,\ 2^3 \times 11,\ 5 \times 11,\ 2 \times 5 \times 11,\ 2^2 \times 5 \times 11$ 의 총 7개다. ($b > 1$ 이므로 $2^3 \times 5 \times 11$ 은 해당되지 않는다.)

28. $\frac{4}{27}$ 를 소수로 나타내었을 때, x_n 은 소수점 아래 n 번째 수를 나타낸다. 다음 값을 구하여라.

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \cdots + x_{41}$$

▶ 답 :

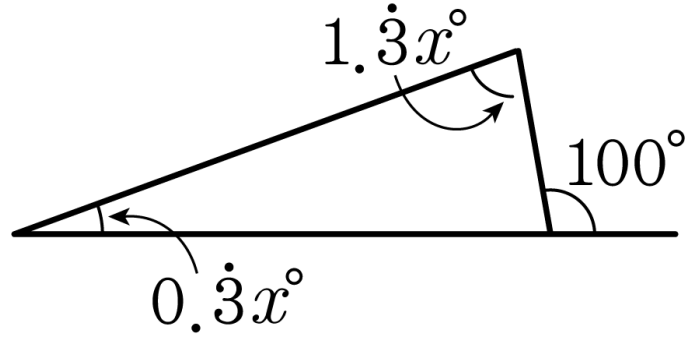
▷ 정답 : 91

해설

$\frac{4}{27} = 0.\dot{1}4\dot{8},\ x_1 = 1,\ x_3 = 8,\ x_5 = 4, \cdots x_7 = 1, \cdots$

$\therefore$ (준식) $= 7 \times (1 + 8 + 4) = 91$

29. 다음 삼각형에서 x 의 값은?



① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

해설

삼각형의 두 내각의 합과 이웃하지 않는 한 외각의 크기는 같으므로 $0.\dot{3}x° + 1.\dot{3}x° = 100°$ 가 된다.

$$0.\dot{3}x + 1.\dot{3}x = \frac{3}{9}x° + \frac{12}{9}x = 100°$$

$$\frac{15}{9}x° = 100\ ,\ 15x° = 900°$$

$$\therefore x = 60$$

30. 어떤 자연수에 $1.0\dot{4}$ 를 곱해야 할 것을 잘못하여 1.04 를 곱했더니 정답과 오답의 차가 $0.\dot{4}$ 가 되었다. 그 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

$x \times 1.0\dot{4} - x \times 1.04 = 0.\dot{4}$

$x \times \left(\frac{94}{90} - \frac{104}{100}\right) = \frac{4}{9}$

$x \times \frac{4}{900} = \frac{4}{9}$

$\therefore\ x = 100$

31. $\frac{5}{333} = x$ 라 할 때, $x \times (999.\dot{9} - 1)$ 의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$$(\text{준식}) = \frac{5}{333} \times (1000 - 1) = \frac{5}{333} \times 999 = 15$$

32. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① 정수와 무한소수의 합은 순환소수이다.

② 유한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.

③ 무한소수와 순환소수의 합은 순환소수이다.

④ 자연수와 유한소수의 합은 유한소수이다.

⑤ 유한소수와 무한소수의 합은 유한소수이다.

해설

① 정수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
③ 무한소수와 순환소수의 합은 무한소수이다.
⑤ 유한소수와 무한소수의 합은 무한소수이다.
무한소수에는 순환하지 않는 무한소수도 있다.