1. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

2. $x^2 - px + q = 0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$일 때 p^2+q^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설
두 근의 합이 3이므로 $p=3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q=2$이다.
따라서 $p^2+q^2=9+4=13$

3. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

4. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

5. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\beta + \frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$이다. $a + b$의 값을 구하면?

① 2　　② 1　　③ −1　　④ −2　　⑤ −3

해설

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 1$이다.

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{1} = 6$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta}$, $\beta + \frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식은
$x^2 - 6x + 4 = 0$
$\therefore\ a = -6,\ b = 4$
$\therefore\ a + b = -2$

6. x에 대한 이차방정식 $x^2+2kx+6k=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2+\overline{\omega}^2=16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^2+2kx+6k=0$ 이 허근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=k^2-6k<0,\ \ k(k-6)<0$

$\therefore\ 0<k<6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-2k,\ \omega\overline{\omega}=6k$이므로

$\omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}=(-2k)^2-12k$

$=4k^2-12k$

$4k^2-12k=16,$

즉, $k^2-3k-4=0$ 에서

$(k+1)(k-4)=0 \quad \therefore\ k=-1$ 또는 $k=4$

$0<k<6$ 이므로 $k=4$

7. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$의 값을 구하면?

① 50　② 40　③ 10　④ 30　⑤ 20

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)+(2-\alpha)(2-\beta)+\cdots+(5-\alpha)(5-\beta)$

$=(1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}+\cdots+\{25-5(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$=(1+4+9+16+25)-(1+2+3+4+5)(\alpha+\beta)+5\alpha\beta$

$=55-15\times2-5=55-30-5=20$