

1. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x + \frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5

② -2

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$$x + \frac{1}{x} = t \text{ 라 하고,}$$

양변에 x 를 곱하면

$$x^2 + 1 = tx$$

$x^2 - tx + 1 = 0$ 에서 x 는 실수이므로

$$D = t^2 - 4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4, t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 2$$

2. $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근이 α, β 이다. $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 2$ 일 때 $p^2 + q^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p = 3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q = 2$ 이다.
따라서 $p^2 + q^2 = 9 + 4 = 13$

3. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면

$$x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore x = 3\sqrt{3} + 3 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} - 1$$

큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$

그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

4. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

- ① 오직 한 실근을 갖는다.
- ② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 실근을 갖는다.
- ⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \frac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

5. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ -1

④ -2

⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 1$ 이다.

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{1} = 6$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta}$, $\beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식은

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\therefore a = -6, b = 4$$

$$\therefore a + b = -2$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^2 + \bar{\omega}^2 = 16$ 이다. 실수 k 의 값은? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)

① -1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0, \quad k(k-6) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 6$$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -2k, \quad \omega\bar{\omega} = 6k \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 + \bar{\omega}^2 &= (\omega + \bar{\omega})^2 - 2\omega\bar{\omega} = (-2k)^2 - 12k \\ &= 4k^2 - 12k \end{aligned}$$

$$4k^2 - 12k = 16,$$

$$\text{즉, } k^2 - 3k - 4 = 0 \text{ 에서}$$

$$(k+1)(k-4) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$$0 < k < 6 \text{ 이므로 } k = 4$$

7. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ 의 값을 구하면?

① 50

② 40

③ 10

④ 30

⑤ 20

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

$$\begin{aligned} & \therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta) \\ &= (1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta) + \{4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} + \cdots + \\ & \quad \{25 - 5(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} \\ &= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(\alpha + \beta) + 5\alpha\beta \\ &= 55 - 15 \times 2 - 5 = 55 - 30 - 5 = 20 \end{aligned}$$