

1. 이차방정식 $x^2 + x + 3k = 0 (k \neq 0)$ 의 한 근이 k 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 식에 k 를 대입하면

$$k^2 + k + 3k = 0, \quad k^2 + 4k = 0$$

$$k(k + 4) = 0$$

$$\therefore k = -4 (k \neq 0)$$

2. 이차방정식 $(2x + 6)(x - 1) = 0$ 이 참이 되는 두 개의 근이 각각 a, b 일 때, $a \times b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$2x + 6 = 0 \text{ 또는 } x - 1 = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore a \times b = -3 \times 1 = -3$$

3. 두 이차방정식 $(x-1)(x-2)=0$, $x^2+14=9x$ 의 공통인 해는?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$(x-1)(x-2)=0$ 의 해는 1, 2

$x^2+14=9x$

$x^2+14-9x=0$, $(x-7)(x-2)=0$

해는 2, 7 따라서 공통인 해는 2

4. $x(x-7) = 18$ 의 두 근 중 작은 근이 $x^2 - ax - 6a = 0$ 의 근일 때, a 의 값은?

① -4

② -2

③ 0

④ 1

⑤ 4

해설

$$x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -2, 9$$

$$(-2)^2 - a(-2) - 6a = 0 \text{ 을 정리하면 } 4a = 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = 1$$

5. 이차방정식 $x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 근 중 작은 근이 이차방정식 $2x^2 + bx - 2 = 0$ 의 근이라고 할 때, b 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$x = 3, -2$ 에서 작은 근은 $x = -2$ 이다.

$x = -2$ 를 $2x^2 + bx - 2 = 0$ 에 대입하면 $8 - 2b - 2 = 0$ 이다.

$$\therefore b = 3$$

6. 이차방정식 $x^2 + 5x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근이 $3x^2 + mx - 2 = 0$ 의 한 근일 때, m 의 값을 구하면?

① -1 ② -3 ③ 1 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 + 5x - 6 = 0$
 $(x + 6)(x - 1) = 0$
 $x = -6$ 또는 $x = 1$
큰 근 1 이 $3x^2 + mx - 2 = 0$ 의 한 근이므로
 $x = 1$ 을 대입하면 $3 + m - 2 = 0$
 $\therefore m = -1$

7. 다음 이차방정식의 근을 모두 고르면?

$$(x-3)^2=25$$

① 8

② -8

③ 2

④ -2

⑤ 5

해설

$$x-3=\pm\sqrt{25}, x=3\pm5$$

$$\therefore x=8 \text{ 또는 } x=-2$$

8. 이차방정식 $2x^2 - 6x = -1 + x^2$ 을 $(x + p)^2 = q$ 의 꼴로 변형할 때, $p + q$ 의 값은?

① 5 ② -5 ③ -8 ④ 11 ⑤ -11

해설

방정식을 정리하면 $x^2 - 6x = -1$

양변에 9 를 더하면 $x^2 - 6x + 9 = -1 + 9$

$(x - 3)^2 = 8$

$p = -3, q = 8$

$\therefore p + q = 5$

9. 다음 보기는 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 6x + 3 = 0$ 을 푸는 과정이다. (가)~(마)에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

보기

$x^2 + 6x = (\text{가})$
 $x^2 + 6x + (\text{나}) = (\text{가}) + (\text{나})$
 $(x + (\text{다}))^2 = (\text{라})$
 $x + (\text{다}) = \pm \sqrt{(\text{라})}$
 $\therefore x = (\text{마})$

- ① (가): -3 ② (나): 9 ③ (다): 3
④ (라): 6 ⑤ (마): $\pm \sqrt{6}$

해설

$x^2 + 6x = -3$
좌변을 완전제곱식이 되게 하는 9 를 양변에 더하면
 $x^2 + 6x + 9 = -3 + 9$
 $(x + 3)^2 = 6$
 $x + 3 = \pm \sqrt{6}$
 $\therefore x = -3 \pm \sqrt{6}$
따라서 ⑤의 연결이 옳지 않다.

10. 이차방정식 $3x^2 - 8x + 2 = 0$ 의 해를 완전제곱식을 이용하여 풀려고 한다. $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 고쳐서 이차방정식의 해를 구하면?

① $x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ ② $x = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{4}$ ③ $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{3}$
④ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{10}}{3}$ ⑤ $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$

해설

양변을 3 으로 나누고 상수항을 이항하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x = -\frac{2}{3}$$

양변에 $\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$ 을 더하면

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} = -\frac{2}{3} + \frac{16}{9}$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$x - \frac{4}{3} = \pm \sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

11. $-4 < x < 4$ 인 정수 x 에 대하여 다음 이차방정식의 해의 개수를 구하여라.

$x^2 + 6x + 8 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$-4 < x < 4$ 에서 x 는 정수이므로 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.
 $x = -3$ 일 때, $(-3)^2 - 18 + 8 = -1 \neq 0$ (거짓)
 $x = -2$ 일 때, $(-2)^2 + 6 \times (-2) + 8 = 0$ (참)
 $x = -1$ 일 때, $(-1)^2 + 6 \times (-1) + 8 = 3 \neq 0$ (거짓)
 $x = 0$ 일 때, $0^2 + 6 \times 0 + 8 = 8 \neq 0$ (거짓)
 $x = 1$ 일 때, $1^2 + 6 \times 1 + 8 = 15 \neq 0$ (거짓)
 $x = 2$ 일 때, $2^2 + 6 \times 2 + 8 = 24 \neq 0$ (거짓)
 $x = 3$ 일 때, $3^2 + 6 \times 3 + 8 = 9 + 18 + 8 = 35 \neq 0$ (거짓)
따라서 해는 $x = -2$ 로 1개이다.

12. 이차방정식 $x^2 + ax + 8 = 0$ 의 한 근이 2이고 다른 한 근이 이차방정식 $3x^2 - 10x + b = 0$ 의 한 근일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^2 + ax + 8 = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면 $a = -6$ 이다.

$x^2 - 6x + 8 = 0$, $(x - 4)(x - 2) = 0$ 이므로

다른 한 근은 $x = 4$ 이다.

$3x^2 - 10x + b = 0$ 에 $x = 4$ 를 대입하면 $b = -8$

$\therefore a - b = -6 - (-8) = 2$

13. 두 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$, $x^2 + bx - 6 = 0$ 의 공통근이 $x = -2$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + a &= 4 + 4 + a = 0 & \therefore a &= -8 \\ x^2 + bx - 6 &= 4 - 2b - 6 = 0 & \therefore b &= -1 \\ \therefore ab &= (-8) \times (-1) = 8 \end{aligned}$$

14. $(x+4):x=x:2$ 를 만족하는 x 의 값은?

① $x=2$ 또는 $x=-4$

② $x=-2$ 또는 $x=4$

③ $x=-2$ 또는 $x=-4$

④ $x=0$ 또는 $x=2$

⑤ $x=0$ 또는 $x=-2$

해설

$$(x+4):x=x:2$$

$$x^2=2(x+4), x^2=2x+8$$

$$x^2-2x-8=0, (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

15. 이차방정식 $x^2 + ax - a - 5 = 0$ 의 두 근이 $x = 2$, $x = b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(x - 2)(x - b) = 0$$

$$x^2 - (2 + b)x + 2b = 0$$

$$\therefore 2 + b = -a, \quad 2b = -a - 5$$

$$b = -3, \quad a = 1$$

$$\therefore a + b = -2$$

16. $\{x \mid x^2 - ax + 2 = 0\} = \{-1, b\}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 3

③ -2

④ -3

⑤ -5

해설

$x^2 - ax + 2 = 0$ 의 두 근이 $-1, b$ 이므로

한 근 $x = -1$ 을 대입하면 $1 + a + 2 = 0 \therefore a = -3$

$a = -3$ 을 주어진 방정식에 대입하면 $x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 1)(x + 2) = 0$, $x = -1$ 또는 $x = -2$

따라서 다른 한 근은 $b = -2$ 이므로 $a + b = -5$ 이다.

17. 이차방정식 $5(2a-3)x^2 - 5(4a^2-9)x - 4(2a+3) = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, a 는 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$5(2a-3)x^2 - 5(4a^2-9)x - 4(2a+3) = 0$ 의 한 근이 1 이므로
 $5(2a-3) \times 1 - 5(4a^2-9) \times 1 - 4(2a+3) = 0$,
 $10a - 15 - 20a^2 + 45 - 8a - 12 = 0$,
 $-20a^2 + 2a + 18 = 0$, $20a^2 - 2a - 18 = 0$, $(20a+18)(a-1) = 0$
,
 a 는 정수이므로 $a = 1$,
 $-5x^2 + 25x - 20 = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $(x-1)(x-4) = 0$,
 $x = 1$ 또는 $x = 4$,
따라서 다른 한 근은 4 이다.

18. 이차방정식 $x^2 + ax - a - 6 = 0$ 의 한 해가 -4 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

이차방정식 $x^2 + ax - a - 6 = 0$ 의 한 근은 -4 이므로

$$(-4)^2 + a \times (-4) - a - 6 = 0$$

$$16 - 4a - a - 6 = 0, \quad 10 - 5a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

19. 이차방정식 $3x^2 - 4x - 4 = 0$ 의 두 근을 a, b 라 할 때, $a + b - ab$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ $-\frac{8}{3}$

④ -1

⑤ $\frac{8}{3}$

해설

$$3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

$$a + b - ab = -\frac{2}{3} + 2 - \left(-\frac{2}{3} \times 2\right) = \frac{8}{3}$$

20. 이차방정식 $2x^2 - 5x - 7 = 0$ 의 두 근이 $x = a$ 또는 $x = b$ 일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{7}$

해설

$$2x^2 - 5x - 7 = (2x - 7)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{7}{2}, x = -1$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\frac{7}{2}} + \frac{1}{-1} = \frac{2}{7} - 1 = -\frac{5}{7}$$

21. 이차방정식 $x^2 - (k-2)x + \frac{9}{4} = 0$ 이 중근을 가질 때, 음수 k 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$$x^2 - (k-2)x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\left(x \pm \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 \pm 3x + \frac{9}{4} = 0$$

$$k-2 = \pm 3$$

$$\therefore k = 5 \text{ 또는 } k = -1$$

22. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2x + 6 - m = 0$ 이 중근을 가질 때, m 의 값과 그 때의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 5$

▷ 정답 : $x = -1$

해설

$$x^2 + 2x + 6 - m = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (6 - m) = 0$$

$$1 - 6 + m = 0$$

$$\therefore m = 5$$

$m = 5$ 를 주어진 식에 대입하면

$$x^2 + 2x + 1 = 0, (x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1(\text{중근})$$

23. 이차방정식 $(x-2)^2 = 5$ 의 두 근의 곱을 구하면?

① -7

② -5

③ -3

④ -1

⑤ 1

해설

$$(x-2)^2 = 5, x-2 = \pm\sqrt{5}, x = 2 \pm \sqrt{5}$$

따라서 두 근의 곱은 $(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 4 - 5 = -1$ 이다.

24. 이차방정식 $(3x - 2)^2 = 5$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

$$(3x - 2)^2 = 5$$

$$3x - 2 = \pm \sqrt{5}$$

$$3x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{3}$$

따라서 두 근의 합은 $\frac{4}{3}$ 이다.

25. 이차방정식 $(3x-4)^2=4$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $x=\frac{2}{3}$

해설

$$(3x-4)^2=4$$

$$3x-4=\pm 2$$

$$3x=4\pm 2, x=\frac{4\pm 2}{3}$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}$$

26. 이차방정식 $(3x-2)^2=5$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

$$(3x-2)^2=5$$

$$3x-2=\pm\sqrt{5}$$

$$3x=2\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore x=\frac{2\pm\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \frac{2+\sqrt{5}}{3}+\frac{2-\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{3}$$

27. 다음은 이차방정식을 $(x+a)^2 = b$ 의 꼴로 나타내는 과정이다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $4(a+b)$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned}(x-1)(2x-3) &= (x+1)^2 \\ x^2-7x &= -2 \\ (x^2-7x+(\square)) &= -2+(\square) \\ (x+a)^2 &= b\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$$\begin{aligned}(x-1)(2x-3) &= (x+1)^2 \\ x^2-7x &= -2 \\ \left(x^2-7x+\frac{49}{4}\right) &= -2+\frac{49}{4} \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 &= \frac{41}{4} \\ a=-\frac{7}{2}, b=\frac{41}{4} \\ \therefore 4(a+b) &= 4\left(-\frac{7}{2}+\frac{41}{4}\right)=27\end{aligned}$$

28. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2+2x+b}{5x^2-cx+3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값은?

① 100 ② 120 ③ 240 ④ -120 ⑤ -100

해설

$\frac{ax^2+2x+b}{5x^2-cx+3} = 4$ 를 정리하면,

$$(a-20)x^2 + (2+4c)x + b-12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

따라서 $a-20=0$, $2+4c=0$, $b-12=0$

$$\therefore a=20, b=12, c=-\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

29. 이차방정식 $3x^2 - x + 2 = 0$ 의 한 근을 A , 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 한 근을 B 라 할 때, $3A^2 + B^2 - A - 3B$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$3A^2 - A + 2 = 0, B^2 - 3B - 6 = 0$ 이므로

$3A^2 - A = -2, B^2 - 3B = 6$

$\therefore 3A^2 + B^2 - A - 3B$
 $= 3A^2 - A + B^2 - 3B$
 $= -2 + 6 = 4$

30. $7x - 5 \leq 4(x + 1)$ 이고 x 는 자연수일 때, $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

① $x = 0, x = 1$

② $x = 2$

③ $x = 2, x = 3$

④ $x = 3$

⑤ $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 \leq 4(x + 1)$ 에서 $7x - 4x \leq 4 + 5, 3x \leq 9 \therefore x \leq 3$
따라서 x 의 값은 1, 2이다.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는 $x = 2, x = 3$ 이므로 해는 $x = 2$ 가 된다.

31. 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 한 근이 a 일 때, $a^2 + \frac{4}{a^2}$ 의 값은?

- ① 12 ② 13 ③ 15 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x = a$ 를 주어진 이차방정식에 대입하면 $a^2 - 4a + 2 = 0$

양변을 a 로 나누면 $a - 4 + \frac{2}{a} = 0$ 이므로 $a + \frac{2}{a} = 4$

$$\therefore a^2 + \frac{4}{a^2} = \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$$

32. α 가 $x^2 + 2x = 10$ 을 만족할 때, $\frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 20}{\alpha + 2}$ 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 = \alpha(\alpha^2 + 2\alpha) = 10\alpha$$

$$\therefore \frac{10\alpha + 20}{\alpha + 2} = \frac{10(\alpha + 2)}{\alpha + 2} = 10$$

33. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때, $(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{3}{4}$

해설

$x = p$ 를 대입하면 $2p^2 - 2p - 1 = 0$, $2p^2 - 2p = 1$ 이므로

$p^2 - p = \frac{1}{2}$ 이다.

$x = q$ 를 대입하면 $2q^2 - 2q - 1 = 0$, $2q^2 - 2q = 1$ 이므로

$q^2 - q = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1) &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{4} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

34. 다음 중 $(a-2)(b+1)=0$ 을 만족하는 a, b 를 모두 고른 것은?

$\text{㉠ } a=2, b=1$	$\text{㉡ } a=3, b=1$
$\text{㉢ } a=1, b=-1$	$\text{㉣ } a=2, b=-1$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉣
- ④ ㉠, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$a-2=0$ 또는 $b+1=0$
 $a=2$ 또는 $b=-1$
따라서 ㉠, ㉢, ㉣이다.

35. 임의의 실수 x 의 정수 부분이 a 일 때, $[x] = a$ 로 나타내기로 한다.
 $2 \leq x < 3$ 일 때, 방정식 $[x]x^2 - x - 5[x] = 0$ 의 해는?

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$2 \leq x < 3$ 이므로 $[x] = 2$ 이다.

$[x] = 2$ 를 대입하면 $2x^2 - x - 10 = 0$ 이고, 인수분해를 하면

$(2x - 5)(x + 2) = 0$ 이다.

$\therefore x = \frac{5}{2}$ ($\because 2 \leq x < 3$)

36. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 25 - 2 + 5 = 28 \end{aligned}$$

37. 이차방정식 $x^2 - ax - 2x + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때의 a 의 값이 이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이다. 이 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$x^2 - ax - 2x + 4 = 0, \quad x^2 - (a+2)x + 4 = 0$$

$$\left(\frac{a+2}{2}\right)^2 = 4, \quad \frac{a+2}{2} = \pm 2$$

$$a+2 = \pm 4$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -6$$

$x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이 2, -6 이므로

$$4 + 2m + n = 0$$

$$\begin{array}{r} -) 36 - 6m + n = 0 \\ \underline{- 32 + 8m = 0} \end{array}$$

$$\therefore m = 4, \quad n = -12$$

$$\therefore m + n = 4 - 12 = -8$$

38. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때,
 mn 의 값은?

- ① 21 ② -21 ③ 27 ④ -27 ⑤ -9

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x^2 - 6x) &= -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m \\ \frac{1}{3}(x-3)^2 &= -m+3 \\ \therefore m &= 9, n = -3 \\ \therefore mn &= -27\end{aligned}$$

39. 이차방정식 $x^2 + 4ax + b = 0$ 의 근이 $x = 2 \pm 2\sqrt{3}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 7$

해설

$x^2 + 4ax + b = 0$ 에서

$$x^2 + 4ax = -b$$

$$x^2 + 4ax + 4a^2 = -b + 4a^2$$

$$(x + 2a)^2 = -b + 4a^2$$

$$x + 2a = \pm \sqrt{4a^2 - b}$$

$$\therefore x = -2a \pm \sqrt{4a^2 - b} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 $a = -1$, a 값을 대입하면

$$\sqrt{4 - b} = \sqrt{12}$$

$$\therefore b = -8$$

따라서 $a - b = 7$ 이다.

40. 이차방정식 $(x-11)^2 = \frac{a-7}{4}$ 이 근을 갖도록 하는 상수 a 의 값 중 가장 작은 자연수의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{a-7}{4} \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$a-7 \geq 0$$

$$a \geq 7$$

$\therefore a$ 의 값이 될 수 있는 가장 작은 자연수는 7 이다.

41. 이차방정식 $x^2 + 2x + A = 0$ 의 근이 $x = 2$ 또는 $x = -4$ 일 때, A 의 값을 구하여라.

① -8 ② -6 ③ -2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned}(x - 2)(x + 4) &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0, A = -8\end{aligned}$$

42. x 에 관한 이차방정식 $2ax^2 + px - ap + 4q = 0$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 $x = 1$ 의 근을 가질 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

$x = 1$ 을 대입하면

$$2a + p - ap + 4q = 0$$

$$(2 - p)a + p + 4q = 0$$

a 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2 - p = 0, \quad p + 4q = 0$$

$$p = 2, \quad p + 4q = 0, \quad 4q = -2, \quad q = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore p + q = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

43. 이차방정식 $x-\frac{3}{x}=6$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때 $(p^2-6p+5)(q^2-6q+3)$

의 값을 구하면?

- ① 12 ② 24 ③ 36 ④ 48 ⑤ 50

해설

$x-\frac{3}{x}=6$ 의 양변에 x 를 곱하면 $x^2-6x-3=0$

$x=p, x=q$ 를 각각 대입하면

$p^2-6p-3=0$ 에서 $p^2-6p=3$

$q^2-6q-3=0$ 에서 $q^2-6q=3$

$\therefore (p^2-6p+5)(q^2-6q+3)=(3+5)(3+3)=48$

44. $2a^2x + ax - 15x = a + 3$ 을 만족하는 x 의 값이 없을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$$2a^2x + ax - 15x = a + 3$$

$$(2a^2 + a - 15)x = a + 3$$

해가 없을 때이므로

$$2a^2 + a - 15 = 0, a + 3 \neq 0 \text{ 이다.}$$

$$2a^2 + a - 15 = 0, (a + 3)(2a - 5) = 0$$

$$a + 3 \neq 0 \text{ 이므로 } 2a - 5 = 0, a = \frac{5}{2} \text{ 이다.}$$

45. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80)$ 이다.
 k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \\ k &= f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80) \\ &= \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50} \\ &\quad + \cdots + \sqrt{81} - \sqrt{80} \\ &= -\sqrt{49} + \sqrt{81} \\ &= -7 + 9 = 2 \\ (a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) &= 0 \text{ 에 } x=2 \text{ 를 대입하면} \\ 4a + 20 + 2a^2 - 4 + 4a - 8 &= 0 \\ 2a^2 + 8a + 8 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 &= 0 \\ (a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2 \\ a = -2 \text{ 를 식에 대입하면} \\ 3x^2 + 2x - 16 = 0, \quad (x-2)(3x+8) &= 0 \\ \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

46. 이차방정식 $4x^2 + px - 5p = 0$ 을 $(2x - A)^2 = B$ 의 꼴로 변형하였더니 $B = 0$ 이 되었다. 이 때, A 의 값을 구하여라. ($p \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$4x^2 + px - 5p = 0$ 을 변형하면

$$\left(2x + \frac{p}{4}\right)^2 = 5p + \frac{p^2}{16}$$

즉, $B = 0$ 이므로

$$5p + \frac{p^2}{16} = 0$$

$$80p + p^2 = 0$$

$$p(p + 80) = 0$$

$p \neq 0$ 이므로

$$\therefore p = -80$$

따라서 $A = -\frac{p}{4} = 20$ 이다.

47. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 3x - 3a = 0$ 과 $2x^2 - 2ax + 3x + a - 2 = 0$ 이 공통근을 가질 때, a 의 값을 구하여라. (단, $-4 < a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x^2 - ax + 3x - 3a = 0$$

$$(x + 3)(x - a) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = a$$

$$2x^2 - 2ax + 3x + a - 2 = 0$$

$$(x - a + 2)(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = a - 2 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$(i) a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } a = \frac{1}{2}$$

$$(ii) a - 2 = -3 \text{ 일 때, } a = -1$$

$$(iii) a = a - 2 \text{ 일 때, 해는 없다.}$$

따라서 $-4 < a < 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

48. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

㉠ $4(x+1)=m+3$

㉡ $4x^2+4x-11=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

㉡ $4x^2+4x-11=0$
 $x^2+x-\frac{11}{4}=0$
 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=3$
 $\therefore x=\frac{-1\pm2\sqrt{3}}{2}$

㉠ $4(x+1)=m+3 \quad \therefore x=\frac{m-1}{4}$
 $\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}<\frac{m-1}{4}<\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$
 $-2-4\sqrt{3}<m-1<-2+4\sqrt{3}$
 $-1-4\sqrt{3}<m<-1+4\sqrt{3}$
정수 m 의 최솟값은 -7, 최댓값은 5 이다.
 $\therefore -7+5=-2$

49. $x^2 + ax + b = 0$ 에서 계수 a, b 를 정하기 위하여 주사위를 던져서 나오는 첫 번째의 수를 a , 두 번째의 수를 b 라 한다. 이 때, 이 이차 방정식이 중근을 가지는 확률은?

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{6}$
- ④ $\frac{1}{9}$
- ⑤ $\frac{1}{18}$

해설

중근을 가지려면 $x^2 + ax + b = 0$ 이 완전제곱식이 되어야 하므로

$\left(a \times \frac{1}{2}\right)^2 = b$ 이다.

$a^2 = 4b$ 를 만족하는 (a, b) 를 구하면 $(a, b) = (2, 1), (4, 4)$ 의 두 가지이고 모든 경우의 수는 36 가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

50. 이차방정식 $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $3\alpha^2 - 3\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $11 + \sqrt{33}$

해설

$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양변에 $12x$ 를 곱하면

$$3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = 8 + 3$$

$$3(x-1)^2 = 11$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{33}}{3}$$

α 는 양의 근이므로 $\alpha = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$

$$\therefore 3\alpha^2 - 3\alpha = 11 + \sqrt{33}$$