

1. 두 집합 $A = \{1, 2, a\}$, $B = \{2, 3, a+1\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 3\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 $A = \{1, 2, 3\} \therefore a = 3$

$B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 원소의 합은 10 이다.

2. 두 집합 $A = \{1, a - 3, 4\}$, $B = \{1, 4, a\}$ 에 대하여 $B - A = \{6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$(B - A) \subset B$ 이므로 $a = 6$ 이다.

3. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$$

$$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$$

4. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 B 의 부분집합 중 A 와 서로소인 집합 X 의 개수는?

① 7개

② 8개

③ 9개

④ 15개

⑤ 16개

해설

$$2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1), A = \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$$

(A 와 서로소인 집합 X) = (2를 원소로 갖지않는 A 의 부분집합)

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

5. 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 1, 2는 반드시 포함하고, 3은 포함하지 않는 것의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

주어진 조건을 만족하는 집합의 개수는 $\{4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다. 따라서, 구하는 부분집합은 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4(\text{개})$ 이다.

6. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 에서 1 을 포함하지 않는 부분집합의 개수가 8 개라고 할 때, 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$2^{(1을 제외한 원소의 개수)} = 2^{n-1} = 8 = 2^3 \quad \therefore n = 4$$

7. 다음 중 명제의 역이 참인 것을 모두 고르면?

- ① x 가 소수이면 x 는 홀수이다.
- ② x 가 3의 배수이면 $x+1$ 은 짝수이다.
- ③ 4의 배수는 2의 배수이다.
- ④ $2x > x+3$ 이면 $x > 3$ 이다.
- ⑤ $x+y \leq 5$ 이면 $x \leq 2, y \leq 3$ 이다.

해설

‘역’의 대우인 ‘이’가 참인지 확인 한다.

- ① x 가 소수가 아니면 x 는 짝수이다 (거짓) 반례: $x = 2$
- ② x 가 3의 배수가 아니면 $x+1$ 은 홀수이다. (거짓) 반례: $x = 5$
- ③ 4의 배수가 아니면 2의 배수가 아니다 (거짓) 반례: 6
- ④ $2x \leq x+3 \rightarrow x \leq 3$ (참)
- ⑤ $x+y > 5 \rightarrow x > 2$ 또는 $y \geq 3$ (참)

8. 전체집합 U 의 세 부분집합 P, Q, R 는 각각 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q, r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $Q \subset R$

③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$

⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$

$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$

또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

$$\therefore P^c \subset R^c$$

따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

9. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 이고,
 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 이므로

$B = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$ 으로 표현된다.

이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.

$$\begin{aligned} & \text{따라서 } \{f(1)\}^2 + \{f(2)\}^2 + \{f(3)\}^2 + \{f(4)\}^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 \end{aligned}$$

10. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

$$\text{I. } f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$$

$$\text{II. } f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{III. } x_1 > x_2 \text{ 이면 } f(x_1) < f(x_2) \text{ 이다.}$$

① I

② III

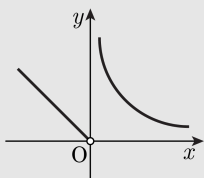
③ I, II

④ II, III

⑤ I, III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$\text{I. } f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$$

$$= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \text{ -<참>}$$

II.

i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0$, $\frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$f(-x) = -(-x) = x,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0$, $\frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$$

i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>

III. 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2) \text{ -<거짓>}$$

따라서 옳은 것은 I, II 이다.

11. 두 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x$, $g(x) = mx + n$ 에 대해 $(f \circ g)(x) = 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$ 이라 할 때, $m^3 + n^3$ 의 값은 얼마인가? (단, m, n 은 실수)

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ 임을 활용한다.

합성함수의 정의에 의하여,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= (mx + n)^3 + (mx + n)^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + 3m^2nx^2 + 3mn^2x + n^3 + m^2x^2$$

$$+ 2mnx + n^2 + mx + n$$

$$= m^3x^3 + (3m^2n + m^2)x^2$$

$$+ (3mn^2 + 2mn + m)x + n^3 + n^2 + n$$

$$= 8x^3 - 8x^2 + 4x - 1$$

주어진 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$m^3 = 8, (m - 2)(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$\therefore m = 2 (\because m \text{ 은 실수})$$

$$3m^2n + m^2 = -8 \text{ 에 } m = 2 \text{ 를 대입하면}$$

$$3 \cdot 2^2 \cdot n + 2^2 = -8, 12n + 4 = -8$$

$$\therefore n = -1$$

$$m = 2, n = -1 \text{ 일 때,}$$

x 의 계수와 상수항도 일치하므로

$$\therefore m = 2, n = -1$$

$$\therefore m^3 + n^3 = 2^3 + (-1)^3 = 7$$

12. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x - 1) = x^2 + 2x - 1$ 을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은 얼마인가?

① -1

② 2

③ 4

④ 7

⑤ 14

해설

$$f(3) = f(2 \cdot 2 - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$$

13. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$ 에서 $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로 $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

14. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

$$x \text{로 나누면, } x - 7 + \frac{1}{x} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$$

15. 직각삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 $4, a, b$ 이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$

② $\frac{16}{3}$

③ $\frac{32}{3}$

④ $\frac{40}{3}$

⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$ 이고, $4, a, b$ 가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로
 $4^2 + a^2 = b^2 \dots \textcircled{㉠}$

또, $4, a, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2a = 4 + b, b = 2a - 4 \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡}$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$4^2 + a^2 = (2a - 4)^2, 16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$$

$$3a^2 - 16a = 0, a(3a - 16) = 0$$

$$\therefore a = \frac{16}{3}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

16. 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 0이 아닌 등차수열이고, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 20$ 일 때, $a_2 + a_8$ 의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 을 차례로 $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ 로 놓으면

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 5a = 20$$

$$\therefore a = 4$$

이때, $a_2 = a - 3d, a_8 = a + 3d$ 이므로

$$a_2 + a_8 = 2a = 8$$

17. 첫째항이 3이고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + pn$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 할 때, $p+d$ 의 값은? (단, p 는 상수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$S_n = n^2 + pn$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 + p(n-1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= n^2 + pn - (n^2 - 2n + 1 + pn - p) \\ &= 2n - 1 + p \rightarrow d = 2 \end{aligned}$$

$$a_1 = 1^2 + p = 3$$

$$p = 2$$

$$\therefore p + d = 2 + 2 = 4$$

18. 수직선 위에 서로 다른 두 점 $A(1)$, $B(x)$ 가 있다. 선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P 라 하면 A , P , B 의 좌표는 이 순서로 등비수열을 이룬다.

① 2

② 3

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$P \text{의 } x \text{좌표} = \frac{1 \cdot x + 2 \cdot 1}{1 + 2} = \frac{x + 2}{3}$$

$$1 \cdot x = \left(\frac{x + 2}{3} \right)^2$$

$$x = \frac{x^2 + 4x + 4}{9}$$

$$9x = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, 4$$

$$x \neq 1 \text{ 이므로 } x = 4$$

19. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127

② 136

③ 148

④ 156

⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$

20. $\sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1)$ 을 n 에 대한 식으로 나타내면 $an^2 + bn + c$ 일 때, 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 1) + (n^2 + 1) - \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{k^2 + 1 - (k^2 - 1)\} + (n^2 + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 + (n^2 + 1) \\ &= 2(n-1) + (n^2 + 1) = n^2 + 2n - 1 \\ &\therefore a = 1, b = 2, c = -1 \\ &\therefore abc = -2 \end{aligned}$$

21. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ 의 값은?

① $\sqrt{n-1} - 1$

② $\sqrt{n+1} - 1$

③ $\sqrt{n+1}$

④ $\sqrt{n+1} + 1$

⑤ $\sqrt{2n+1} + 1$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1\end{aligned}$$

22. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}}$$

$$= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}$$

23. 방정식 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① -2

② -8

③ -12

④ -26

⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 4,$$

$$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \\ &= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b} \\ &= \frac{16 + 1}{-\frac{1}{2}} = -34\end{aligned}$$

24. $100^{0.3}$ 의 정수 부분은?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\log 100^{0.3} = 0.3 \log 100 = 0.3 \times 2 = 0.6$$

이때 $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0.6020$ 이므로

$$\log 3 < \log 100^{0.3} < \log 4$$

$$\therefore 3 < 100^{0.3} < 4$$

따라서 $100^{0.3}$ 의 정수 부분은 3이다.

25. $\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n]$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 284

해설

(i) $n = 1, 2$ 일 때, $0 \leq \log_3 n < 1$ 이므로 $[\log_3 n] = 0$

(ii) $3 \leq n < 9$ 일 때, $1 \leq \log_3 n < 2$ 이므로 $[\log_3 n] = 1$

(iii) $9 \leq n < 27$ 일 때, $2 \leq \log_3 n < 3$ 이므로 $[\log_3 n] = 2$

(iv) $27 \leq n < 81$ 일 때, $3 \leq \log_3 n < 4$ 이므로 $[\log_3 n] = 3$

(v) $81 \leq n < 100$ 일 때, $4 \leq \log_3 n < 5$ 이므로 $[\log_3 n] = 4$

(i) ~ (v)로부터

$$\sum_{k=1}^{100} [\log_3 n] = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 54 + 4 \cdot 20 = 284$$

26. 전체 집합 $U = \{x \mid |x| \leq 2 \text{인 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \leq 1 \text{인 정수}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3 \text{인 정수}\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{-2\}$

해설

$$U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{1, 2\}$$

$$A^c = \{-2, 2\}, B^c = \{-2, -1, 0\}$$

$$A^c \cap B^c = \{-2\}$$

27. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4$, $n(B^c) = 7$, $n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

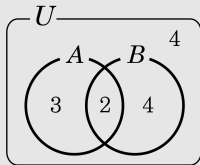
$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$

벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.



28. $a > 0, b > 0, c > 0$ 일 때

$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} > 0, \frac{c}{b} > 0, \frac{a}{c} > 0$$

$$1 + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{1 \times \frac{b}{a}} = 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$1 + \frac{c}{b} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b}}, \quad 1 + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

$$\geq 8\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}}\sqrt{\frac{a}{c}} = 8$$

$$\therefore \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \geq 8$$

따라서 최솟값은 8

29. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

I. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

II. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개

② 4 개

③ 6 개

④ 8 개

⑤ 12 개

해설

조건 I에서, $x_1 = 0, x_2 = 0$ 이면

$$f(0) = f(0) + f(0) \text{ 에서 } f(0) = 0$$

$x_1 = 1, x_2 = -1$ 이면

$$f(0) = f(1) + f(-1) \text{ 에서, } f(-1) = -f(1)$$

이때, 조건 II에 의해

$$f(1) \neq 0, f(-1) \neq 0$$

따라서, 두 조건을 만족시키는

함수 f 의 개수는 0이 대응할 수 있는

원소는 0의 1가지,

1이 대응할 수 있는 원소는

-2, -1, 1, 2의 4가지,

-1이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1가지,

따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

30. $y = ||x + 2| - |x - 6||$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 정수 k 의 개수는?

① 4개

② 5개

③ 6개

④ 7개

⑤ 8개

해설

$y = ||x + 2| - |x - 6|| = |f(x)|$ 이라하면

$y = f(x)$ 에서

절댓값 기호안의 값을 0 으로 하는

x 의 값이 $-2, 6$ 이므로

(i) $x < -2$ 일 때,

$$y = -(x + 2) + (x - 6) = -8$$

(ii) $-2 \leq x < 6$ 일 때,

$$y = x + 2 + (x - 6) = 2x - 4$$

(iii) $x \geq 6$ 일 때,

$$y = x + 2 - (x - 6) = 8$$

이상에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림1] 과 같다.

이 때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 [그림

1] 의

그래프에서 $y \geq 0$ 인 부분은

그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그

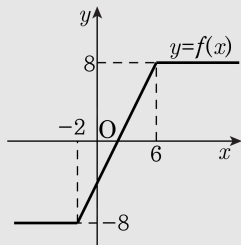
림2] 와 같다. [그림2] 에서 $y = |f(x)|$ 의

그래프와

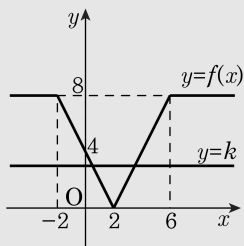
직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 2 이

상이기 위한 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq 8$

따라서 구하는 정수 k 의 개수는 8 개이다.



[그림1]



[그림2]

31. 두 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 과 $x^2 - bx + a = 0$ 이 모두 두 개의 양의 근을 갖도록 두 실수 a, b 의 값을 정할 때, $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β , $x^2 - bx + a = 0$ 의 근을 γ, σ 라 하자. 이 때, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 개의 양의 근을 가진다면,
 $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ 를 만족한다.
 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \gamma + \sigma = b,$
 $\gamma\sigma = a(a, b > 0)$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{9(\gamma + \sigma)}{\gamma\sigma}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 6$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{9}{\gamma} + \frac{9}{\sigma} \geq 6$$

32. 자연수에서 정의된 함수 f 가 임의의 자연수 n 에 대하여 관계식 $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 을 만족할 때, 다음 중 $2f(4) + 3f(5)$ 와 함숫값이 같은 것은? (단, $f(1) \neq 0$)

① $2f(6)$

② $2f(7)$

③ $f(7)$

④ $f(8)$

⑤ $f(9)$

해설

주어진 관계식 $f(n+2) = (n+1) + f(n)$ 을 이용하여 $f(4) + f(5) = f(6)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2f(4) + 3f(5) &= f(4) + f(5) + f(4) + f(5) + f(5) \\ &= f(6) + f(6) + f(5) \end{aligned}$$

또 $f(5) + f(6) = f(7)$, $f(6) + f(7) = f(8)$ 이므로
 $2f(4) + 3f(5) = f(6) + f(7) = f(8)$ 이다.

33. $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 라 한다. $f(y, x, z) + f(z, x, y) = -3$ 이고 $x + y + z \neq 0$ 일 때, $xy + yz + zx$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

(준식)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \\
 &= \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} - 1 - 1 - 1 = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3
 \end{aligned}$$

$$(준식) = -3 \text{ 에서 } (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 0$$

$$\therefore (x+y+z) \times \frac{xy+yz+zx}{xyz} = 0 \text{ 에서}$$

$$x+y+z \neq 0 \text{ 이므로 } xy+yz+zx = 0$$