

1. 두 집합 $A = \{2, 5, a\}$, $B = \{b, 9, 10\}$ 가 $A \cap B = \{5, 9\}$ 를 만족할 때, $A \cup B$ 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

① $\{2, 5, 10\}$

② $\{2, 5, 9\}$

③ $\{2, 5, 9, 10\}$

④ $\{5, 9, 10, 11\}$

⑤ $\{5, 8, 9, 12\}$

해설

$A \cap B = \{5, 9\}$ 이므로 $\{5, 9\} \subset \{2, 5, a\}$, $\{5, 9\} \subset \{b, 9, 10\}$ 이다.
따라서 $a = 9$, $b = 5$ 이므로 $A \cup B = \{2, 5, 9, 10\}$ 이다.

2. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳은 것으로만 짝지어 진 것은?

- $\neg (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $\sqsubset A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $\ominus A - B = A \cap B^c$
 $\oplus (A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

- ① $\neg, \sqsubset$

② $\neg, \ominus$

③ $\sqsubset, \ominus$
- ④ $\sqsubset, \oplus$

⑤ $\ominus, \oplus$

해설

- $\sqsubset A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $\ominus (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

3. 다음 글을 읽고, 밑줄 친 부분을 수학적 표현을 사용하여 나타낼 때, 틀린 곳을 구하여라.

엄마 : 오늘 오는 친구 중에 초등학교 친구와
중학교 친구는 각각 몇 명이니?
성실 : 초등학교 친구 6명과 중학교 친구 8명이요.
 $n(A)=6$ $n(B)=8$
이 말을 들은 엄마는 14명이 먹을 수 있는
음식을 준비했다.
(그 날 저녁)
친구들 : 안녕하세요.
엄마 : 어서들 와라, 그런데! 승훈아!
왜 11명이니? 안 온 사람 있니?
 $\ominus n(A \cup B)=11$
성실 : 아니요,
제가 초대한 친구는 모두 왔는데요.
엄마 : 그럼,
초등학교와 중학교가 모두 같은 친구는 3명,
 $\ominus n(A \cap B)=3$
초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구는 3명
이지? $\ominus n(B-A)=3$
성실 : 예, 맞아요.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉔

해설

초등학교 친구 중 중학교가 다른 친구들의 집합은 $A - B$ 이므로
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 6 - 3 = 3$ (명)이다.
따라서 ㉔의 수학적 표현은 $n(A - B) = 3$ 이다.

4. 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 항의 개수는?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{16} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ n-1 &= 2 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

5. 수열 $\log_{10}(n+2)$ 의 제 98 항은?

① $\log_2 10$

② $\log_2 100$

③ 10

④ 1

⑤ 2

해설

$$a_n = \log_{10}(n+2) \text{ 이므로}$$

$$a_{98} = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2$$

따라서 , 제 98 항은 2 이다.

6. 집합 $A = \{n \mid n \text{은 } 10 \text{ 이하인 자연수}\}$ 의 진부분집합 중 10보다 작은 소수가 모두 들어 있는 진부분집합의 개수를 구하면?

① 16개 ② 31개 ③ 32개 ④ 63개 ⑤ 64개

해설

10보다 작은 소수는 2, 3, 5, 7이므로 주어진 집합은 {2, 3, 5, 7}을 반드시 포함하면서 진부분집합이어야 하므로 $2^{10-4} - 1 = 2^6 - 1 = 63(\text{개})$

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 10, n(B) = 13, n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 는?

① 10

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$ 이다.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 13 - 5 = 18$ 이므로

$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 18 - 5 = 13$ 이다.

8. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$

② $P \cup Q$

③ $P^c \cup Q^c$

④ $P - Q$

⑤ $Q - P$

해설

$p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

9. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

10. 세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)^2 = a(2a+1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

11. $\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt[3]{2}$

④ 2

⑤ $\sqrt[3]{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\log_2 9} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} &= (\log_2 9)^{\frac{1}{3}} \times (\log_3 16)^{\frac{1}{3}} = (2 \log_2 3 \times \\ &4 \log_3 2)^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2\end{aligned}$$

12. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
 $\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
 $= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
 $\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

13. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 20 \text{ 미만의 } 8 \text{의 배수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 8 \text{ 미만의 } 20 \text{의 약수}\}$ 일 때, $n(A) = a$, 집합 B 의 부분집합의 개수를 b 라 할 때, $b - a$ 의 값을 골라라.

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

$A = \{8, 16\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$ 이므로 $a = n(A) = 2$ 이고,
 $n(B) = 4$ 이므로, $b = (B \text{의 부분집합의 개수}) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 이다.
 $\therefore b - a = 16 - 2 = 14$

14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, $X \subset A$, $A - X = \{1, 4\}$ 를 만족하는 집합 X 의 원소를 모두 더하면?

① 4

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 15

해설

$$X \subset A, A - X = \{1, 4\} \Rightarrow X = \{2, 3, 5\}$$

$$\therefore 2 + 3 + 5 = 10$$

15. 집합 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, n 를 반드시 포함하고 2 를 포함하지 않는 부분집합의 개수가 4 개 일 때, 자연수 n 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$2^{(1, 2, 3, n \text{을 제외한 원소의 개수})} = 2^{n-4} = 4 = 2^2 \quad \therefore n = 6$$

16. 두 조건 $p : x$ 는 홀수, $q : x$ 는 10 이하의 소수에 대하여 ' p 또는 $\sim q$ '의 부정을 만족하는 것은? (단, x 는 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 7 ⑤ 8

해설

' $\sim(p \text{ 또는 } \sim q)$ '는 ' $\sim p$ 이고 q '에서 $\sim p : x$ 는 짝수, $q : x$ 는 10 이하의 소수
따라서, ' x 는 짝수'이고 ' x 는 10 이하의 소수'를 만족하는 것은 2이다

17. 첫째항이 -10 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

$$a_1 = -10, a_7 = -10 + 6d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \cdot (-10) + 6d\}}{2}, a_7 = S_7 \text{에서 } d = 4$$

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot (-10) + 9 \cdot 4\}}{2} = 80$$

18. 첫째항부터 제10항까지의 합은 85, 제 11항부터 제20항까지의 합은 385인 등차수열이 있다. 이때, 이 수열 $\{a_n\}$ 의 제 21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 685

해설

주어진 수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_{10} = 85, S_{20} = S_{10} + 385 = 85 + 385 = 470$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2} = 85 \cdots \textcircled{A}$$

$$S_{20} = \frac{20(2a + 19d)}{2} = 470 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 3$

$$\therefore S_{30} = \frac{30 \{ 2 \cdot (-5) + 29 \cdot 3 \}}{2} = 1155$$

따라서 구하는 합은 $1155 - 470 = 685$

19. 1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 할 때, $\frac{S}{10}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 132

해설

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ 이므로
1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 자연수의 곱을 모두 더한 값을 S 라 하면

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2 = (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) + 2S$$

$$2S = \left(\frac{10 \cdot 11}{2}\right)^2 - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2640$$

$$\therefore S = 1320$$

$$\therefore \frac{S}{10} = 132$$

20. 수열 1, 2, 5, 10, 17, 26, ... 의 제 20항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 362

해설

1, 2, 5, 10, 17, 26

$\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$ $\vee$
 1 3 5 7 9

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - (n-1) \\ &= 1 + n^2 - n - n + 1 \end{aligned}$$

$$a_n = n^2 - 2n + 2$$

$$\therefore a_{20} = 400 - 40 + 2 = 362$$

21. 다음은 네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기 순으로 나열한 것이다.

1234	1243	...	1423	1432
2134	2143	...	2413	2431
3124	3142	...	3412	3421
4123	4132	...	4312	4321

위의 모든 수들의 총합은?

- ① 88880
- ② 77770
- ③ 66660
- ④ 55550
- ⑤ 44440

해설

처음 수와 마지막의 수의 합, 두 번째 수와 끝에서 두 번째 수의 합, ... 이 모두 5555이고 나열된 네 자리 자연수는 모두 24개이므로 구하는 모든 수의 총합은 $5555 \times 12 = 66660$

22. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$ 일 때, a_{30} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 727

해설

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= b_n = 2n - 5 \\ \therefore a_n &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 5) \\ &= 2 + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} - 5(n-1) \\ &= n^2 - 6n + 7 \\ \therefore a_{30} &= 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727\end{aligned}$$

23. $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{7}, \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n < \frac{1}{50}$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 51

해설

$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$ 이므로 수열 $\frac{1}{a_n}$ 은 등차수열을 이룬다. 등차

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 공차를 d 라 하면 $d = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 일반항 $\frac{1}{a_n}$ 은

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot 2 = \frac{6n-5}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{6n-5}$$

$$\frac{3}{6n-5} < \frac{1}{50} \text{에서 } n \geq 25, \dots$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 26이다.

24. 임의의 실수 x 의 네제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(x)$ 라 할 때, $f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$2^{-2} = \frac{1}{4} > 0$, $-2^2 = -4 < 0$, $2^0 = 1 > 0$ 이고 4는 짝수이므로

$$f(2^{-2}) + f(-2^2) + f(2^0)$$

$$= 2 + 0 + 2$$

$$4$$

25. $p \times 3^x = 1$, $q \times 3^y = 1$ 일 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y}$ 을 p , q 로 바르게 나타낸 것은?

- ① $2pq$ ② $8pq$ ③ p^2q ④ p^4q^2 ⑤ $\frac{q}{p^2}$

해설

$3^x > 0$, $3^y > 0$ 이므로 $p > 0$, $q > 0$ 이다.

$$3^x = \frac{1}{p}, \quad 3^y = \frac{1}{q}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+y} = (3^{-2})^{2x+y} = 3^{-4x-2y}$$

$$= (3^x)^{-4} (3^y)^{-2} = \left(\frac{1}{p}\right)^{-4} \left(\frac{1}{q}\right)^{-2} = p^4 q^2$$