1. 등식 $2x^2 - 6x - 2 = a(x+1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x+1)$ 가 x 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

$x = 0$을 대입하면 : $a = 1$
$x = -1$을 대입하면 : $b = 2$
$x = 2$을 대입하면 : $c = -1$
$\therefore\ a + b + c = 2$

2. 다항식 $x^3 - 2$를 $x^2 - 2$로 나눈 나머지는?

① 2　② -2　③ $-2x - 2$

④ $2x + 2$　⑤ $2x - 2$

해설

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 - 2} = \frac{x^3 - 2x + 2x - 2}{x^2 - 2} = x + \frac{2x - 2}{x^2 - 2}$$

$\therefore$ 몫은 x, 나머지는 $2x - 2$

3. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ -1

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$$

4. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x+2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

5. x에 대한 이차방정식 $(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4} = m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore \ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

6. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$ ② $k \leq 1$ ③ $k < 3$

④ $k \leq 3$ ⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore \ k \leq 3$

7. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면
$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$
$\therefore a = 1, \ b = -2$
$\therefore a - b = 3$

8. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

9. $3\overline{PA} = 2\overline{PB}$가 되도록 하는 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $A(-3, 2)$이고, $P(1, 0)$일 때, 점 B의 x좌표와 y좌표의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3\overline{PA} = 2\overline{PB}$이므로
$\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$이고,
점 P가 선분 AB 위의 점이므로
점 P는 선분 AB를 $2 : 3$으로 내분하는 점이다.
이 때, 점 B의 좌표를 $B(a, b)$라 하면

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times (-3)}{2 + 3}, \frac{2 \times b + 3 \times 2}{2 + 3}\right) = (1, 0)$$

$$\frac{2a - 9}{5} = 1, \frac{2b + 6}{5} = 0$$

$\therefore a = 7, b = -3$

$\therefore a + b = 4$

10. 두 다항식 A, B 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$㉠
$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$㉡
(㉠ + ㉡) ÷ 3 : $A=x^3-x^2+x+2$
(2㉠ − ㉡) ÷ 3 : $B=-2x^3-x^2+3x+3$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

12. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore a=b \quad \therefore a-b=0$

13. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

14. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	$9a+b+24$

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$ 이므로

$k=3$, $c=3$, $a=1$, $d=12$, $b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

15. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

16. $11 \cdot 13^3 + 33 \cdot 13^2 + 33 \cdot 13 + 11$의 인수가 아닌 것을 고르면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ 14 ⑤ 22

해설

$11 = a,\ 13 = b$ 라 하면

$a \cdot b^3 + 3ab^2 + 3ab + a$

$= a(b^3 + 3b^2 + 3b + 1)$

$= a(b+1)^3 = 11 \cdot 14^3$

$= 11 \times 2^3 \times 7^3$

17. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

18. $\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}=a+bi$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 15 ② 25 ③ 35 ④ 45 ⑤ 55

해설

$\sqrt{-12}+\sqrt{-3}\sqrt{-6}-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{-2}}$

$=2\sqrt{3}i-3\sqrt{2}+\sqrt{3}i$

$=-3\sqrt{2}+3\sqrt{3}i$

$=a+bi$

따라서, $a=-3\sqrt{2}, b=3\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=18+27=45$

19. 임의의 자연수 m, n에 대하여 $i^{3m}+i^{3n+1}$이 나타낼 수 있는 서로 다른 복소수는 모두 몇 개 인가? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

i) $i^{3m}=(-i)^m \Rightarrow -i,-1,i,1$

ii) $i^{3n+1}=(-i)^n\times i \Rightarrow 1,-i,-1,i$

∴ i+ ii를 더해서 나올 수 있는 수는

$(0,2,1-i,1+i,-1-i,-1+i,2i,-2i,-2)$ 의 9가지 이다.

20. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x-2)(x+1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

21. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

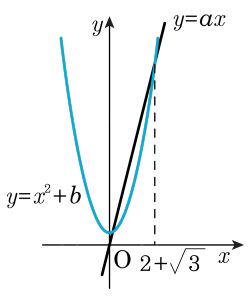
▷ 정답: 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$
$y = x + 1 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

22. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 x 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, a, b 는 유리수)

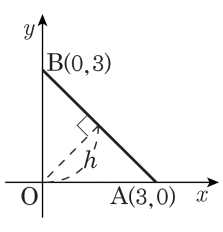
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, a, b 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ a + b = 5$

23. 다음 그림은 삼각형 OAB 의 넓이를 이용하여 h 를 구하는 과정이다.



$\triangle OAB$
$= \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$
따라서
$h =$ ( )

( ) 안에 알맞은 값은?

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 3

해설

$\triangle OAB = \frac{1}{2}\overline{OA}\ \overline{OB}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h$

$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times h$

$\frac{9}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \times h$

따라서 $h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

24. $\triangle ABC$에서 A(6, 1), B(−1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

외심을 $P(a, b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$ ……㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$ ……㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a - b - 16 = 0,\ 2a - b - 6 = 0$

연립하여 풀면 $a = 2,\ b = -2$

따라서 외심은 $(2, -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{PA} = 5$

25. 좌표평면에 두 점 $A(1,3)$, $B(2,-1)$ 이 있다. 점 $C(m,2)$ 에 대하여 $\overline{AC}+\overline{BC}$ 가 최소일 때의 m 의 값을 구하면?

① $\frac{5}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$\overline{AC}+\overline{BC}$ 가 최소인 경우는
세 점 A, B, C 가 일직선 위에 있을 때이므로
직선 AB 와 BC 의 기울기가 같다.

따라서 $\frac{-1-3}{2-1}=\frac{2-(-1)}{m-2}$

$\therefore m=\frac{5}{4}$

26. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족하는 복소수 z의 개수는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 없다. ② 1 개 ③ 2 개

④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ (단, a, b 는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore\ 2a-3b=1$

따라서 $2a-3b=1$을 만족하는 a, b는 무수히 많고, $z=a+bi$ 이므로 문제의 조건을 만족하는 z가 무수히 많음을 알 수 있다.

27. $a < -1$ 일 때, x에 대한 방정식 $|x^2-1|-1=a$의 실근의 개수를 구하면? (단, 중근은 하나로 센다.)

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

방정식 $|x^2-1|-1=a$의 실근의 개수는 $y=|x^2-1|-1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

$y=|x^2-1|-1$에서 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x^2-1\geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2+1 & (x^2-1<0 \text{ 일 때}) \end{cases}$

이므로 $f(x)=|x^2-1|-1$로 놓으면

(i) $x^2-1\geq 0$, 즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,

$f(x)=x^2-1-1=x^2-2$

(ii) $x^2-1<0$, 즉 $-1<x<1$ 일 때,

$f(x)=-x^2+1-1=-x^2$

(i), (ii)로부터 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서, 구하는 실근의 개수는 a의 값에 따라 다음과 같다.

$\begin{cases} a<-1 \text{일 때, 없다.} \\ a=-1 \text{ 또는 } a>0 \text{일 때, 2개} \\ a=0 \text{일 때, 3개} \\ -1<a<0 \text{일 때, 4개} \end{cases}$