

1. 연립방정식 $\begin{cases} -ax + y = 5 \\ 2x - y = -b \end{cases}$ 의 해가 무수히 많을 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

해가 무수히 많을 조건은

$$\frac{-a}{2} = \frac{1}{-1} = \frac{5}{-b} \text{ 이므로}$$

$$a = 2, b = 5 \quad \therefore a + b = 7$$

2. 희철이가 등산을 하는데 올라갈 때에는 시속 3km 로 걷고, 내려올 때에는 다른 길을 택하여 시속 5km 로 걸어서 모두 4 시간이 걸렸다. 총 16km 를 걸었다고 할 때, 올라간 거리를 구하여라.

▶ 답: km

▶ 정답 : 6 km

해설

올라간 거리를 $x\text{km}$, 내려온 거리를 $y\text{km}$ 라 하면

총 걸린 시간이 4시간이므로 $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 4 \cdots \textcircled{7}$

총 거리가 16km 이므로

$$x + y = 16 \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$\textcircled{7} \times 15 - \textcircled{L} \times 3 \text{ 하면}$$

$$\begin{array}{r} 5x+3y=60 \\ -) 3x+3y=48 \\ \hline 2x=12 \end{array}$$

$$x = 6$$

$$y = 16 - 6 = 10$$

따라서 올라간 거리 6km, 내려온 거리 10km이다.

3. 분속 150m 로 A 자전거가 먼저 출발하여 300m 를 간 후, B 자전거가 분속 200m 로 출발하였다. B 자전거는 출발한지 몇 m 지점에서 A 자전거를 앞지르는가?

① 400m

② 600m

③ 800m

④ 1200m

⑤ 1400m

해설

A , B 자전거가 각각 움직인 시간을 x 분, y 분이라 하면 A 자전거가 2분 먼저 출발했고 B 자전거가 A 자전거를 추월할 때 움직인 거리가 같으므로

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 150x = 200y \end{cases}$$

$$150(y + 2) = 200y$$

$$3y + 6 = 4y$$

$$y = 6$$

$$\therefore 200 \times 6 = 1200(\text{m})$$

4. $x = \frac{4}{7}$ 일 때, $10^6x - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 571428

해설

$x = \frac{4}{7} = 0.571428571428 \dots$ 이고

$10^6x = 571428.571428 \dots$ 이므로

$10^6x - x = 571428$ 이다.

5. $0.\dot{8} + 2.\dot{6}$ 을 계산하여 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3.\dot{5}$

해설

$$0.\dot{8} + 2.\dot{6} = \frac{8}{9} + \frac{24}{9} = \frac{32}{9} = 3.\dot{5}$$

6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$ 일 때, $\frac{a+3ab+b}{a-ab+b}$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 3, \frac{a+b}{ab} = 3 \\ \therefore 3ab &= a+b \\ \frac{a+3ab+b}{a-ab+b} &= \frac{3ab+3ab}{3ab-ab} \\ &= \frac{6ab}{2ab} \\ &= 3\end{aligned}$$

7. 다음 보기에서 일차방정식 $3x + y = 10$ 에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ 미지수가 2 개인 일차방정식이다.
- ㉡ x, y 가 모든 수일 때, 해의 순서쌍 (x, y) 는 무수히 많이 있다.
- ㉢ x, y 가 자연수일 때, 해는 3 쌍이다.
- ㉤ $x = -3$ 일 때, $y = 1$ 이다.
- ㉥ y 에 관해 정리하면 $y = 3x + 10$ 이다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

- ㉠. 미지수가 2 개인 일차방정식이다.
- ㉡. x, y 가 모든 수일 때, 해의 순서쌍 (x, y) 는 무수히 많이 있다.
- ㉢. x, y 가 자연수일 때, 해는 $(1, 7), (2, 4), (3, 1)$ 으로 3 쌍이다.
- ㉤. $x = -3$ 일 때, $y = 19$ 이다.
- ㉥. y 에 관해 정리하면 $y = -3x + 10$ 이다.

8. 어느 중학교 대표로 뽑힌 20 명의 학생이 수학경시대회 시험을 보았다. 1 번 문제는 1 점, 2 번 문제는 3 점, 3 번 문제는 4 점으로 채점을 하였더니 평균이 1.45 점이었고, 3 번 문제의 배점은 그대로 하고, 1 번 문제를 3 점, 2 번 문제를 1 점으로 배점을 바꾸어 채점을 하였더니 평균이 2.35 점이었다. 1 번 문제를 맞힌 학생의 수가 2 번 문제를 맞힌 학생의 수의 4 배와 같을 때, 1 번 문제를 맞힌 학생 수를 구하여라. (단, 각 학생은 한 문제씩만 맞힌 것으로 한다.)

▶ **답 :** 명

▶ 정답 : 12 명

해설

1 번, 2 번, 3 번 문제를 맞힌 학생 수를 각각 x, y, z 라 하면

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1.45 \times 20 & \dots\dots \textcircled{7} \\ 3x + y + 4z = 2.35 \times 20 & \dots\dots \textcircled{8} \\ x = 4y & \dots\dots \textcircled{9} \end{cases}$$

㉠, ㉡에 ㉢을 대입하면

$$\begin{cases} 7y + 4z = 29 & \dots\dots \textcircled{2} \\ 13y + 4z = 47 & \dots\dots \textcircled{3} \end{cases}$$

㉠ - ㉡하면 $6y = 18$

$$y = 3$$

$y = 3$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면 $x = 12$

따라서 1번 문제를 맞힌 학생은 12명이다.

9. 어느 학교의 작년도 학생 수는 모두 1000명이었다. 금년에는 남학생이 4%, 여학생이 6% 증가하여 전체로는 49명이 증가하였다. 금년의 남학생과 여학생의 수를 각각 구하여라.

▶ **답:** 명▶ **답:** 명

▷ 정답: 남학생 : 572명

▷ 정답: 여학생 : 477명

해설

작년 남학생의 수를 x , 작년 여학생의 수를 y 라고 하면

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 0.04x + 0.06y = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \dots \textcircled{1} \\ 4x + 6y = 4900 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

① $\times 4 -$ ②를 하면

$x = 550, y = 450$

따라서 금년의 남학생 수는

$$550 + 550 \times 0.04 = 572(\text{명}) \text{ 이고,}$$

금년의 여학생 수는

$$450 + 450 \times 0.06 = 477(\text{명}) \text{이다.}$$

10. 그릇에 농도가 다른 두 소금물 A, B가 있다. A 소금물 100g과 B 소금물 200g을 섞으면 농도가 20%의 소금물이 되고, A 소금물 300g과 B 소금물 100g을 섞으면 25%의 소금물이 되었을 때, A 소금물과 B 소금물의 농도를 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 : %

▶ 답: %

▶ 정답 : 28%

▶ 정답 : 16%

해설

소금물 A의 농도를 $x\%$, 소금물 B의 농도를 $y\%$ 라고 하면

$$\begin{cases} \frac{x}{100} \times 100 + \frac{y}{100} \times 200 = \frac{20}{100} \times 300 \\ \frac{x}{100} \times 300 + \frac{y}{100} \times 100 = \frac{25}{100} \times 400 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y = 60 \dots \textcircled{7} \\ 3x + y = 100 \dots \textcircled{8} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 28, y = 16$ 이다.

11. 합금 A는 구리를 20% , 아연을 30% 포함한 합금이고, B는 구리를 30%, 아연을 10% 포함한 합금이다. 이 두 종류의 합금을 녹여 구리를 9 kg, 아연을 10 kg 얻으려면 합금 A는 몇 kg이 필요한지 구하여라.

합금	A	B
구리	20%	30%
아연	30%	10%

▶ 답 : kg

▷ 정답 : 30 kg

해설

합금 A의 양을 x kg, 합금 B의 양을 y kg 이라고 하면

$$\begin{cases} \frac{20}{100}x + \frac{30}{100}y = 9 \\ \frac{30}{100}x + \frac{10}{100}y = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 90 \cdots \textcircled{㉠} \\ 3x + y = 100 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 30$, $y = 10$ 이다.

12. $2^n = x, 6^n = y$ 라 할 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times 3^{n-1}$ 을 x, y 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : y

해설

$$6^n = (2 \times 3)^n = 2^n \times 3^n, \quad 3^n = \frac{6^n}{2^n} = \frac{y}{x}$$

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2 \times 2^n = (1 + 2) \times 2^n = 3 \times 2^n$$

$$\begin{aligned} \therefore (2^n + 2^{n+1}) \times 3^{n-1} &= (3 \times 2^n) \times 3^{n-1} \\ &= 3^n \times 2^n \\ &= \frac{y}{x} \times x = y \end{aligned}$$

13. n 이 자연수일 때, $(-1)^{2n}(x-1)(x+1)+(-1)^{2n+1}(x-1)^2+(-1)^{2n-1}(x+1)^2$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-x^2-3$

해설

$2n$ 은 짝수, $2n-1$, $2n+1$ 은 홀수이므로
 $(-1)^{2n}=1$, $(-1)^{2n+1}=-1$, $(-1)^{2n-1}=-1$
 $\therefore$ (주어진 식) $= (x-1)(x+1) - (x-1)^2 - (x+1)^2$
 $= -x^2-3$

14. $x + \frac{1}{5x} = 6$ 일 때, $\left(x - \frac{1}{5x}\right)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{176}{5}$

해설

$$\left(x - \frac{1}{5x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{5x}\right)^2 - \frac{4}{5} = 6^2 - \frac{4}{5} = \frac{176}{5}$$

15. $xy + \frac{1}{z} = 1$, $yz + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $\frac{xyz^2 - xyz}{(1 - 2x)(2x - 1)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$xy + \frac{1}{z} = 1, \frac{xyz + 1}{z} = 1, xyz = z - 1 \cdots \textcircled{A}$$

$$yz + \frac{1}{x} = 2, \frac{xyz + 1}{x} = 2, xyz = 2x - 1 \cdots \textcircled{B}$$

$$\frac{xyz^2 - xyz}{(1 - 2x)(2x - 1)} = \frac{xyz(z - 1)}{-(2x - 1)^2}$$

에 식 $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 대입하여 풀면,

$$\frac{xyz(z - 1)}{-(2x - 1)^2} = \frac{xyz(xyz)}{-(xyz)^2} = -1$$

16. 0 이 아닌 세 수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x}{y} : \frac{y}{z} : \frac{z}{x} = k : 3k : 9k$ 일 때,

$\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2}$ 의 값을 상수 k 를 이용해 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{27k^6 + k^3 + 1}{3k^3}$

해설

$\frac{x}{y} : \frac{y}{z} : \frac{z}{x} = k : 3k : 9k$ 이므로,

$\frac{x}{y} = k, \frac{y}{z} = 3k, \frac{z}{x} = 9k$

$x = yk, y = 3zk, z = 9xk$

$x = yk = (3zk)k = 3zk^2$

$$\begin{aligned} \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} &= \frac{3zk^2 \times 3zk}{z^2} + \frac{3zk \times z}{(3zk^2)^2} + \frac{z \times 3zk^2}{(3zk)^2} \\ &= 9k^3 + \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{27k^6 + k^3 + 1}{3k^3}$$

17. 평균 키가 183cm 인 성인 남자 x 명과 평균 키가 156cm 인 여학생 y 명과 평균 키가 130cm 인 어린이 z 명이 있다. 이 세 집단의 사람 키의 총합은 정확히 37m 일 때, 모든 사람의 키의 평균을 구하여라. (단, x, y, z 는 모두 10 이하의 자연수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : $\frac{925}{6}$ cm

해설

$$183x + 156y + 130z = 3700$$

$$26(6y + 5z) = 3700 - 183x$$

여기서 $3700 - 183x$ 는 26 의 배수이므로

$$\begin{aligned} 3700 - 183x &= (26 \times 142 + 8) - (26 \times 7 + 1)x \\ &= 26(142 - 7x) + (8 - x) \end{aligned}$$

이때, $8 - x$ 가 26 의 배수, 또는 0 이어야 하고, x 는 10 이하의 자연수이므로

$$\therefore x = 8,$$

$6y + 5z = 86$ 을 만족하는 10 이하의 자연수 y, z 의 순서쌍 $(y, z) = (6, 10)$

$$\therefore y = 6, z = 10$$

$$\begin{aligned} (\text{모든 사람의 키의 평균}) &= \frac{3700}{8 + 6 + 10} \\ &= \frac{3700}{24} \\ &= \frac{925}{6} (\text{cm}) \text{ 이다.} \end{aligned}$$

18. 어떤 일을 A, B 두 사람이 함께 하면 x 일 걸리고, B, C 두 사람이 함께 하면 y 일 걸리고, C, A 두 사람이 함께 하면 z 일 걸린다. 세 명이 함께 일을 하여 완료하는 데 걸리는 일수를 x, y, z 를 사용한 식으로 나타내어라.

▶ 답: 일

▶ 정답 : $\frac{2xyz}{xy + yz + zx}$ 일

해설

일의 양을 1로 보고 A, B, C 세 명이 일을 완료하는 데 걸리는 일수를 a 일, b 일, c 일 이라 하면, 하루에 하는 일의 양은 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 이다.

$$x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 \quad \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x} \dots \textcircled{7}$$

$$y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 \quad \therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{y} \dots \textcircled{\text{L}}$$

$$z\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = 1 \quad \therefore \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{z} \dots \textcircled{E}$$

㉠+㉡+㉢ 을 하면 $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

세 명이 함께 일을 하여 하루에 하는 일의 양은

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2xyz}{xy + yz + zx}$$

따라서 세 명이 함께 일을 하여 완료하는 데 걸리는 일수는

$$1 \div \frac{xy + yz + zx}{2xyz} = \frac{2xyz}{xy + yz + zx} \text{ 일}$$

19. 10km 떨어진 강의 두 지점을 왕복하는 배가 있다. 강물을 거슬러 올라가다가 고장이 나서 10 분간 떠내려가는 바람에 왕복하는 데 2 시간이 걸렸다. 떠내려 간 시간을 빼면, 올라가는 데 걸린 시간은 내려가는 데 걸린 시간의 $\frac{6}{5}$ 배였다. 정지된 물에서의 배의 속력을 구하여라.

▶ 답 : km/h

▷ 정답 : $\frac{144}{13}$ km/h

해설

정지된 물에서의 배의 속력을 시속 x km, 흐르는 물의 속력을 시속 y km 라 하면

10 분간 떠내려 간 거리는 $\frac{y}{6}$ km 이다.

또 한, 배 가 총 움 직 인 시 간 은 (왕복 2시간) - (고장나서 떠내려 간 시간 10분) = 110분 이고,

(올라갈 때 걸린 시간) : (내려올 때 걸린 시간) = 6 : 5 이므로

올라갈 때 걸린 시간은 60 분(1 시간), 내려올 때 걸린 시간은 50

분($\frac{5}{6}$ 시간) 이다.

거리에 관한 식을 세우면

$$\begin{cases} \frac{5}{6}(x+y) = 10 & \cdots \textcircled{㉠} \\ x-y = 10 + \frac{1}{6}y & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립하여 방정식의 해를 구하면

$$x = \frac{144}{13}, y = \frac{12}{13}$$

따라서 정지된 물에서의 배의 속력은 $\frac{144}{13}$ km/h이다.