1. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

2. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$$D = p^2 - 4(2p+1)$$
$$= p^2 - 8p - 4 = 0$$

판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로

실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

3. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2-(k-1)^2 > 0,\ 2k-1 > 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

4. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

5. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

6. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$ ㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$ ㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \dfrac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

7. x에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k < 0$　② $k > 0$　③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \le 0$　⑤ $k \ge 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$이

허근을 가져야 하므로

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$

$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$

$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$

$\therefore k > 0$

8. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

ㄱ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

ㄴ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

ㄷ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

9. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$

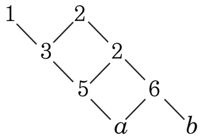
$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

10. 다음 그림은 수의 규칙을 나타낸 것이다. a, b와 대응하는 수를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?



① $x^2-5x+6=0$ ② $x^2-11x+30=0$

③ $x^2-41x+330=0$ ④ $x^2-7x+8=0$

⑤ $x^2-15x+12=0$

해설

왼쪽 $1-3-5-a$는 윗줄 두 수의 합

오른쪽 $2-2-6-b$는 윗줄 두 수의 곱

$\therefore a=5+6=11,\ b=5\times6=30$

11, 30을 두 근으로 하는 이차방정식은

$\therefore\ x^2-41x+330=0$

11. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

12. x의 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p\neq 0$)

① $q\geq -\frac{1}{3}$ ② $q>\frac{1}{2}$ ③ $q\geq \frac{1}{2}$
④ $q>-\frac{1}{2}$ ⑤ $q\geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면

$\alpha+2\alpha=3p\quad\therefore\ \alpha=p$

$\alpha\cdot 2\alpha=4q-2\quad\therefore\ \alpha^2=2q-1$

따라서 $p^2=2q-1$

한편 $\mathrm{D}>0$에서 $9p^2-4(4q-2)>0$

$9(2q-1)-16q+8>0$

$2q-1>0$

$\therefore\ q>\frac{1}{2}$

13. x에 관한 이차방정식 $x^2-k(k+3)x+k^2-1=0$의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k의 조건은?

① $-1<k\le 1$ ② $-1<k<1$ ③ $0<k\le 2$

④ $-1\le k\le 0$ ⑤ $-1\le k\le 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라 하자.

(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,

$\alpha\beta=k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1$

(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,

$\alpha+\beta=k(k+3)>0 \quad \therefore\ k>0,\ k<-3$

$\alpha\beta=k^2-1=0 \quad \therefore\ k=\pm 1$

따라서, $k=1$

그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1<k\le 1$

14. 양수 x에 대하여 $[x] = n$이라 할 때, $x^2 + (x-n)^2 = 20$이다. 이 때, $2x - n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{6}$　③ $\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$x - n = \alpha$라 하면 $0 \le \alpha < 1$

$x^2 = 20 - \alpha^2$에서 $19 < x^2 \le 20$

즉, $\sqrt{19} < x \le \sqrt{20}$이므로 $[x] = n = 4$이다.

따라서, 주어진 식은 $x^2 + (x-4)^2 = 20$이 되고,

식을 정리하면 $x^2 - 4x - 2 = 0$

$\therefore\ x = 2 + \sqrt{6}(\because x > 0)$

$\therefore\ 2x - n = 4 + 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6}$

15. x의 방정식 $(x-a)(x-b)-cx=0$의 해가 α, β일 때, x의 방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$의 해를 a, b로 나타내면?

① $-a,\ -b$ ② $a,\ b$ ③ $-2a,\ -2b$

④ $2a,\ 2b$ ⑤ $a,\ -b$

해설

$x^2-(a+b+c)x+ab=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a+b+c,\ \alpha\beta=ab$ 이것을

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0$에 대입하면

$x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$ 따라서 $x=a,\ b$