

1. 24와 k 의 공약수가 1, 2, 4일 때, k 가 될 수 있는 70보다 작은 자연수를 모두 구하여라.

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :

▷ 정답 : 4
▷ 정답 : 20
▷ 정답 : 28
▷ 정답 : 44
▷ 정답 : 52
▷ 정답 : 68

해설

24의 약수가 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이고 k 의 약수는 1, 2, 4, ... 이다.
() 안에 들어갈 수 있는 자연수는 70 이하 4의 배수 중 3, 6, 8, 12, 24의 배수를 제외한 수이다.
∴ 4, 20, 28, 44, 52, 68

2. 18과 a 의 공약수가 1, 2, 3, 6일 때, a 가 될 수 있는 50보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

18과 a 의 최대공약수가 6이므로

$$18 = 6 \times 3, a = 6 \times k$$

k 는 3의 배수이면 안 된다.

따라서 50보다 작은 자연수 a 는

$$6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12, 6 \times 4 = 24, 6 \times 5 = 30, 6 \times 7 = 42, 6 \times 8 = 48 \text{의 } 6 \text{ 개이다.}$$

3. 두 자연수 $2^2 \times 5^2 \times 15$, $2^2 \times 5^{\square} \times 14$ 의 공약수의 개수가 12개일 때 $\square$ 안에 들어가기에 적당하지 않은 수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$2^2 \times 5^3 \times 3$, $2^3 \times 5^{\square} \times 7$ 공약수의 개수가 12 개이므로 $2^2 \times 5^x$ 에서 $3 \times (x + 1) = 12 \quad \therefore x = 3$ 따라서, 최대공약수는 $2^2 \times 5^3$
 $\therefore \square \geq 3$

4. 두 자연수 a, b 의 최대공약수가 2×3^2 일 때, a, b 의 공약수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

a, b 의 공약수는 최대공약수 $2 \times 3^2 = 18$ 의 약수와 같으므로
(a, b 의 공약수의 개수)
= (18의 약수의 개수)
= (2×3^2 의 약수의 개수)
= $(1 + 1) \times (2 + 1)$
= 6(개)

5. 세 변의 길이가 88m, 96m, 120m인 삼각형 모양인 땅의 가장자리에 일정한 간격으로 말뚝을 박으려고 한다. 세 모퉁이에는 반드시 말뚝을 박고, 가능한 적은 수의 말뚝을 박을 때, 필요한 말뚝의 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 38 개

▷ 정답 : 38 개

해설

88, 96, 120 의 최대공약수는 8 이므로 8m 간격으로 말뚝을 박으면 된다.
∴ (필요한 말뚝의 수)
= $(88 \div 8) + (96 \div 8) + (120 \div 8)$
= $11 + 12 + 15$
= 38(개)

6. 동북이는 학교 운동장 한 편에 있는 농구 코트 주변에 철망을 설치하여 안전하게 농구를 하고자 한다. 철망은 가로 길이 24m, 세로 길이 64m 인 농구 코트 주변에 일정한 간격으로 기둥을 고정시키고, ‘ㄷ’자 형으로 망을 설치하고자 한다. 기둥은 처음 시작되는 지점과 끝나는 지점 그리고 모서리에는 반드시 고정시키고, 가능한 한 적게 사용하려고 한다면 모두 몇 개의 기둥이 필요하겠는가?

① 12 개 ② 13 개 ③ 14 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

기둥 사이의 간격을 x 라 할 때,
 $24 = x \times \square$, $64 = x \times \triangle$
 x 는 24와 64 의 최대공약수
 $24 = 2^3 \times 3$, $64 = 2^6$
 $\therefore x = 2^3 = 8 \text{ (m)}$
기둥 사이의 간격을 8m 라 할 때
가로 $24 = 8 \text{ (m)} \times 3 \text{ (개)}$, 세로 $64 = 8 \text{ (m)} \times 8 \text{ (개)}$
직사각형 모양의 운동장의 가장자리에 ‘ㄷ’자 형으로 망을 설치할 때 필요한 기둥의 수는
 $\therefore (2 \times 3) + 8 + 1 = 15 \text{ (개)}$

7. 세 자연수 $2^2 \times A$, $2 \times 3 \times A$, $3^2 \times A$ 의 최소공배수가 108 일 때, A 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

세 자연수의 최소공배수가 108 이고, $108 = 2^2 \times 3^3$ 이므로 $2^2 \times A$, $2 \times 3 \times A$, $3^2 \times A$ 의 최소공배수와 $2^2 \times 3^3$ 가 같으면 된다. $2^2 \times A$, $2 \times 3 \times A$, $3^2 \times A$ 의 최소공배수는 $2^2 \times 3^2 \times A$ 이므로 $2^2 \times 3^3$ 와 비교하면 A 는 3 이다.

8. 다음 두 수 $2^a \times 3^3 \times 5^2$, $2^5 \times 3^2 \times 5^{a+1}$ 의 최소공배수가 $2^5 \times 3^3 \times 5^{a+1}$ 일 때, 다음 중 자연수 a 가 될 수 없는 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

2^a 와 2^5 의 최소공배수가 2^5 이므로 a 는 5 이하의 수가 되어야 한다.

또한 5^2 과 5^{a+1} 의 최소공배수가 5^{a+1} 이므로 $a+1$ 은 2 이상의 수가 되어, a 는 1 이상의 수가 된다.

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5이다.

9. 다음 조건을 각각 만족하는 자연수의 개수의 합을 구하여라.

- ㉠ 최대공약수가 24인 두 수 a, b 의 공약수

㉡ 50보다 크지 않은 4와 6의 공배수

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

- ㉠ 최대공약수가 24인 두 수 a, b 의 공약수는 24의 공약수이므로
 $24 = 2^3 \times 3^1$ 에서 약수의 개수는
 $(3 + 1) \times (1 + 1) = 8(\text{개})$

㉡ 4와 6의 최소공배수는 12이므로
50보다 작은 12의 배수는 12, 24, 36, 48의 4개
 $\therefore 8 + 4 = 12$

10. 자연수 n 에 대하여 $n+1$ 은 3의 배수이고 $n+4$ 은 7의 배수일 때, $n+6$ 을 21로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$n+1$ 은 3의 배수이므로
값은 2, 5, 8, 11, 14, ... 이고,
 $n+4$ 은 7의 배수이므로
값은 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, ... 이다.
그러므로 자연수 n 이 될 수 있는 수는
위 두 값의 공통부분이므로 38, 59, 80, 101, 122, ... 이다.
 $\therefore (n+6)$ 을 21로 나눈 나머지 = 2

11. 600을 자연수 a 로 나누면 b^2 이 된다고 할 때, 가능한 $\frac{a}{b}$ 의 값 중 두 번째로 큰 값은? (단, b 는 자연수)

- ① $\frac{1}{2}$
- ② 600
- ③ 300
- ④ 150
- ⑤ 75

해설

$\frac{600}{a} = \frac{2^3 \times 3 \times 5^2}{a}$ 가 제곱수이어야 하므로

$a = 2 \times 3 \times p^2$ (p 는 자연수) 꼴의 600의 약수이다.

$a = 2 \times 3 \times 1^2 = 6$ 일 때,

$$\frac{600}{6} = 100 = 10^2 \quad \therefore b = 10$$

$a = 2 \times 3 \times 2^2 = 24$ 일 때,

$$\frac{600}{24} = 25 = 5^2 \quad \therefore b = 5$$

$a = 2 \times 3 \times 5^2 = 150$ 일 때,

$$\frac{600}{150} = 4 = 2^2 \quad \therefore b = 2$$

$a = 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$ 일 때,

$$\frac{600}{600} = 1^2 \quad \therefore b = 1$$

$$\frac{6}{10} < \frac{24}{5} < \frac{150}{2} < 600 \text{ 이므로}$$

$\frac{a}{b}$ 의 값 중 두 번째로 큰 값은 $\frac{150}{2} = 75$

12. 서로 다른 두 자연수 x, y 의 최소공배수는 120 이고, $4x - 8 = y$ 일 때, xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 480

해설

x, y 의 최대공약수를 G , 최소공배수를 L 이라고 하면 $x = aG, y = bG, L = abG$ (단, a 와 b 는 서로소)로 놓을 수 있다.

최소공배수가 120 이므로 $abG = 120 \cdots \textcircled{㉠}$

또 $4x - 8 = y$ 이므로

$$4aG - 8 = bG, (4a - b)G = 8 \cdots \textcircled{㉡}$$

각 변끼리 $\frac{\textcircled{㉡}}{\textcircled{㉠}}$ 을 계산하면

$$\frac{4aG - bG}{abG} = \frac{8}{120} \text{ 에서 } \frac{4a - b}{ab} = \frac{1}{15},$$

$$60a - 15b = ab, a(60 - b) = 15b,$$

$b > 0, 60 - b > 0$ 이므로 $1 \leq b \leq 59$ 를 만족하는 (a, b) 의 순서쌍은 $(3, 10), (5, 15), (10, 24), (15, 30), (21, 35) \cdots$

a, b 는 서로소인 자연수이므로 $a = 3, b = 10$

두 수의 최대공약수는 $abG = 120$ 에서 $G = 4$ 이고, 따라서 두 수의 곱 $xy = abG^2 = 3 \times 10 \times 16 = 480$

13. 세 자연수 $A = 14 \times a$, $B = 21 \times a$, $C = 28 \times a$ 의 최대공약수가 35 일 때, 최소공배수를 구하면?

① 84 ② 168 ③ 252 ④ 420 ⑤ 840

해설

$A = 2 \times 7 \times a$, $B = 3 \times 7 \times a$, $C = 2^2 \times 7 \times a$ 이므로 최대공약수는 $7 \times a = 35$ 이고, $a = 5$ 이다.
따라서 최소공배수는 $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ 이다.

14. $15 \times x$, $20 \times x$ 의 최소공배수가 180 이라고 할 때 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$15 \times x$, $20 \times x$ 의 최소공배수는 $2^2 \times 3 \times 5 \times x = 180$ 이다.
따라서 $x = 3$ 이다.

15. 1부터 100까지의 자연수 중에서 2, 3, 4로 나누었을 때 그 나머지가 각각 1, 2, 3이 되는 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

해설

2, 3, 4 로 나누었을 때 그 나머지가 1, 2, 3 이 되는 수는
(2, 3, 4로 나누어 떨어지는 수) - 1 이므로
(2, 3, 4의 최소공배수인 12의 배수) - 1 을 1 부터 100 까지의 자연수 중에서 구하면 $12-1=11$, $24-1=23$, $\dots$, $12 \times 8 - 1 = 95$ 까지 8개이다.

16. 6으로 나누면 5가 남고, 5로 나누면 4가 남고, 4로 나누면 3이 남는 세 자리의 자연수 중 가장 작은 수를 구하여라.

① 116 ② 117 ③ 118 ④ 119 ⑤ 120

해설

구하는 수를 x 라 하면 $(x+1)$ 은 6, 5, 4 의 공배수이다.

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 6 \quad 5 \quad 4} \\ \underline{3 \quad 5 \quad 2} \end{array}$$

$$\therefore \text{최소공배수} = 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 60$$

세 자리의 공배수 중 가장 작은 수는 $60 \times 2 = 120$ 이고

$$x+1 = 120 \quad \therefore x = 119$$

17. 1부터 200까지의 자연수 중에서 3의 배수이거나 5의 배수인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 93 개

해설

1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수의 개수는 66개
1부터 200까지의 자연수 중 5의 배수의 개수는 40개
1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수이면서 5의 배수인 것의 개수는 13개
1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수이거나 5의 배수인 것의 개수는
 $66 + 40 - 13 = 93$

18. 100 이하의 자연수 중 5의 배수이거나 7의 배수인 것의 개수는?

- ① 31 개 ② 32 개 ③ 33 개 ④ 34 개 ⑤ 35 개

해설

100 이하의 자연수 중 5의 배수의 개수는 20개
100 이하의 자연수 중 7의 배수의 개수는 14개
100 이하의 자연수 중 5의 배수이면서 7의 배수인 것의 개수는 2개
100 이하의 자연수 중 5의 배수이거나 7의 배수인 것의 개수는 $20 + 14 - 2 = 32$

19. 세 수 $\frac{16}{75}$, $\frac{28}{45}$, $\frac{24}{25}$ 에 어떤 수를 각각 곱했더니 그 결과가 모두 자연 수가 되었다. 어떤 수가 될 수 있는 가장 작은 기약분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{225}{4}$

해설

어떤 수가 될 수 있는 가장 작은 기약분수를

$\frac{b}{a}$ 라 하면

a 는 16, 28, 24의 최대공약수 4이고,

b 는 75, 45, 25의 최소공배수 225이다.

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{225}{4}$$

20. $\frac{35}{6}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{5}{9}$ 의 어느 것과 곱하여도 자연수가 되는 분수 중 가장 작은 분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{18}{5}$

해설

$$\frac{(6, 3, 9 \text{의 최소공배수})}{(35, 10, 5 \text{의 최대공약수})} = \frac{18}{5}$$